UNIVERSITÄT ULM
Abgabe:
09.01.2012, vor der Übung

Prof. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 11/12

16 Punkte

Übungen zu Maßtheorie

Blatt 9

28. Für welche $\alpha \in (0,\infty)$ ist die Funktion (4)

(a) $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{-\alpha}$ in $\mathcal{L}^1([1,\infty),\mathcal{B},\lambda)$.

(b) $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{-\alpha}$ in $\mathcal{L}^1((0,1],\mathcal{B},\lambda)$.

29. Es sei $f : (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,t) := t^{x-1}e^{-t}$. Zeige, dass (4)

$$\Gamma(x) := \int_{(0,\infty)} f(x,t)\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

eine stetige Funktion auf $(0,\infty)$ definiert. Zeige weiter, dass $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ für alle $x > 0$ und folgere, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

30. Gib ein Beispiel (8)

(a) einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$, die nicht bei unendlich beschränkt ist. Dabei heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bei unendlich beschränkt, wenn es ein $C > 0$ und ein $T > 0$ gibt, sodass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq T$.

(b) einer Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, sodass der punktweise Grenzwert $f(x) := \lim f_n(x)$ für alle $x \in [a,b]$ existiert und es eine Riemann-integrierbare Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, für die $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber f nicht Riemann-integrierbar ist.

(c) einer nicht uneigentlich Riemann-integrierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

(d) einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1((0,\infty),\mathcal{B},\lambda)$, sodass die Funktion $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(t) := \int_{(0,t]} f\,\mathrm{d}\lambda$$

nicht differenzierbar ist.

31. Diese Aufgabe soll zur Selbstkontrolle und Klausurvorbereitung dienen. Sie ist freiwillig zu bearbeiten und wird nicht gewertet.

In dieser Multiple Choice Aufgabe sind insgesamt 8 Antworten korrekt. In jeder einzelnen Frage können mehrere oder gar keine Antworten korrekt sein. Kreuze die richtigen Antworten an.

(a) Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum, I eine Menge und $A_i \in \Sigma$ für alle $i \in I$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Sigma$, falls

- ☐ $I = [0, 1]$.
- ☐ $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- ☐ I ist endlich.
- ☐ $I = \mathbb{Q}$.

(b) Betrachte den Maßraum (Ω, Σ, μ) mit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Sigma = \sigma(\{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}\}$ und $\mu(A) := \delta_2(A) + 2\delta_3(A)$. Dann gilt:

- ☐ $\{1\} \in \Sigma$.
- ☐ $\{4\} \in \Sigma$.
- ☐ $\{4\}$ ist eine Nullmenge.
- ☐ $\int_\Omega 3\mathbb{1}_{\{1,2\}} - \mathbb{1}_{\{2,3,4\}} = 0$.

(c) Das Lebesguemaß der Menge $\{\pi\}$ ist

- ☐ 0.
- ☐ 1.
- ☐ π.
- ☐ nicht definiert, weil $\{\pi\} \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

(d) Betrachte den Maßraum $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$. Dann gilt:

- ☐ Jede stetige Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.
- ☐ Jede integrierbare Funktion ist Riemann-integrierbar.
- ☐ Jede integrierbare Funktion ist beschränkt.
- ☐ Jede monotone Funktion ist integrierbar.

(e) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n : \Omega \to [0, \infty)$ eine Folge messbarer Funktionen, sodass $f_n \downarrow 0$ punktweise aber $\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \not\to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt:

- ☐ Der Maßraum ist nicht σ-endlich.
- ☐ Keine der Funktionen f_n ist integrierbar.
- ☐ Der Maßraum ist nicht endlich.
- ☐ Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n$ ist nicht integrierbar.