Universität Ulm
Wiederholungsblatt

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 12/13

Analysis II für Informatiker und Ingenieure

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-3x^2}{\cos^2(x)-1}$ (b) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^x$ (c) $\lim\limits_{x\downarrow 0} \dfrac{\sqrt[5]{1+x}-1}{\sqrt[7]{1+x}-1}$

2. Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom um Entwicklungspunkt 0 der Funktion $f(x) := \sin(x)e^x + x^2$.

3. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) := \frac{3x-7}{(x-2)(x-3)^2} - x$$

in eine Potenzreihe um 0.

4. Berechnen Sie – sofern wohldefiniert – den Wert folgender Integrale.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 t^4 \log t\,\mathrm{d}t$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{8x+6}{1+(2x^2+3x)^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x-7}{(x-2)(x-3)^2}\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin(2t)\,\mathrm{d}t$

5. Entscheiden Sie, ob die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^5y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

(a) stetig ist.
(b) partiell differenzierbar ist.
(c) total differenzierbar ist.

6. Es sei $M := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := xy$.

(a) Skizzieren Sie die Menge M und geben Sie (ohne Beweis) an, ob M offen, abgeschlossen, zusammenhängend oder konvex ist.
(b) Entscheiden Sie, ob Maximum und Minimum der Funktion f existieren und bestimmen sie ggf. alle globalen Extremstellen von f.

7. Bestimmen Sie den minimalen Abstand der beiden Mengen

$$M_1 := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x+y=z\}$$

und

$$M_2 := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2+(y+25)^2+z^2 = 3\}.$$

8. Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extremstellen der durch

$$f(x,y) := -3x^2 - 5y^2 - 4xy + 6x + 4y - 3$$

gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

9. Bestimmen Sie die Länge der Kurve $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^4$, die durch

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} \frac{4}{3}t^3 \\ 4t^2 + 4 \\ 9t + 81 \\ \sqrt{2}t^2 + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

gegeben ist.

10. Wir betrachten die Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch $f_n(x) := 1/(1 + nx^2)$ gegeben sind.

(a) Zeigen Sie, dass $f_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert und geben Sie den Grenzwert an.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) auf $[\delta, \infty)$ für jedes $\delta > 0$ gleichmäßig konvergiert.