Analysis II für Informatiker und Ingenieure

Blatt 13

54. Es seien $0 < r < R$ gegeben. (4+3)

(a) Berechnen Sie die Oberfläche des hyperbolischen Paraboloids

$$\mathscr{P} := \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2 - y^2}{2},\ x^2 + y^2 \leq R^2 \right\},$$

sowie den Wert $\int_{\mathscr{P}} f \, \mathrm{d}o$ für $f(x, y, z) := z + y^2 + \frac{1}{2}$.

(b) Berechnen Sie die Oberfläche des Torus

$$\mathscr{T} := \left\{ \begin{pmatrix} (R + r\sin\varphi)\cos\vartheta \\ (R + r\sin\varphi)\sin\vartheta \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \right\}.$$

55. Es bezeichne $\mathscr{F}$ die Oberfläche der Kugel um 0 mit Radius $R > 0$. Berechnen Sie nur unter Verwendung der Definition den Wert des Integrals $\int_{\mathscr{F}} f \, \mathrm{d}O$ für $f(x, y, z) := (2z, x + y, 0)$. (5)

56. Wir betrachten das Möbiusband (2+4)

$$\mathscr{M} := \left\{ \begin{pmatrix} (2 + s\cos t)\cos(2t) \\ (2 + s\cos t)\sin(2t) \\ s\sin t \end{pmatrix} : 0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 2\pi \right\}.$$

sowie die Funktion $f : G \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) := (-y/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2), 0)$ mit Definitionsbereich $G := \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, z)^T : z \in \mathbb{R}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf G.

(b) Berechnen Sie $\int_{\partial\mathscr{M}} f$, wobei $\partial\mathscr{M}$ die positiv orientierte Randkurve von $\mathscr{M}$ bezeichne.
Hinweis: Der Satz von Stokes kann zur Lösung dieser Aufgabe nicht verwendet werden, weil das Möbiusband nicht der Rand eines Standardbereichs ist.

57. Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = 0$ für jedes zweimal stetig differenzierbar Vektorfeld $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (d.h. f_1, f_2 und f_3 sind jeweils zweimal stetig differenzierbar). (2)