Universität Ulm

Abgabe:
Bis 07.12.12, 10:15
Briefkasten vor H3

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 12/13

21 Punkte

Analysis II für Informatiker und Ingenieure — Blatt 7

29. Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen und die Hesse-Matrix der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := z \sin(x + y^2)$. (3)

30. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := x^2y^3$ und $a = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$. (2+3)

(a) Bestimmen Sie die Tangentialebene an die durch $z = f(x, y)$ beschriebene Fläche im Punkt $(a, f(a))^T$.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung Südwest auf zwei Arten: Zunächst mit Hilfe der Definition der Richtungsableitung und anschließend mit Hilfe des Gradienten von f (Satz 26).

31. Bestimmen Sie die Ableitung f' und – sofern definiert – Determinante $\det f'$ der folgenden Funktionen. (2+3)

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) := \begin{pmatrix} zy^2e^x \\ y^z \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(r, \varphi, \vartheta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$

32. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch (3+1)

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $f_{xy}(0, 0)$ sowie $f_{yx}(0, 0)$.

(b) Sind beide Ableitungen f_{xy} und f_{yx} stetig?
Hinweis: Vermeiden Sie die Bestimmung der partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} auf ganz $\mathbb{R}^2$.

33. Wir betrachten die folgende Parametrisierung des Möbiusbandes (2+2)

$$F(s, t) = \begin{pmatrix} (2 + s\cos t)\cos(2t) \\ (2 + s\cos t)\sin(2t) \\ s\sin t \end{pmatrix}$$

für $0 \le s \le 1$ und $0 \le t \le 2\pi$.

(a) Berechnen Sie die Werte $F(0, 0)$ und $F(0, \pi)$ sowie die Ableitungen F_s und F_t.

(b) Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $F_s \times F_t$ an den Punkten $(0, 0)^T$ und $(0, \pi)^T$. Interpretieren Sie das Ergebnis!