

Definitheit

Dieses Thema aus der Linearen Algebra betrifft **symmetrische Matrizen** $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (symmetrisch heißt $A = A^T$) und den aus ihnen gebildeten **quadratischen Formen** $q(x) = x^T Ax$,

ausgeschrieben $q_A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$.

Definition:

A bzw. die quadratische Form $q_A(x)$ heißt

- (i) **positiv semidefinit**, falls $q_A(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- (ii) **positiv definit**, falls $q_A(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
- (iii) **negativ semidefinit**, falls $q_A(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- (iv) **negativ definit**, falls $q_A(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
- (v) **indefinit**, falls A weder positiv noch negativ semidefinit ist.

Für Definitheit gibt es zwei wichtige Kriterien:

Eigenwertkriterium:

A bzw. $q_A(x)$ ist

- (i) positiv semidefinit \iff alle Eigenwerte von A sind ≥ 0
- (ii) positiv definit \iff alle Eigenwerte von A sind > 0
- (iii) negativ semidefinit \iff alle Eigenwerte von A sind ≤ 0
- (iv) negativ definit \iff alle Eigenwerte von A sind < 0
- (v) indefinit \iff A besitzt sowohl positive als auch negative Eigenwerte.

Wir definieren nun Hauptminoren: $H_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$.

Hauptminorenkriterium:

A bzw. $q_A(x)$ ist

- (i) positiv definit $\iff H_k > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$
- (ii) negativ definit $\iff H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0$ usw.
(kurz: $(-1)^k H_k > 0 \quad \forall k$.)