**Kleine Illustration der Extremwertdiskussion —
Korrektur und Vervollständigung**

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

Dies ist offenbar für sich genommen bereits eine quadratische Form. Dies bedeutet wiederum, daß die Taylorentwicklung von f an der Entwicklungsstelle $(0,0)$ nur aus dem zweiten Taylorterm besteht.

In der Tat erhalten wir für die Taylorentwicklung

$$\begin{array}{lrcl} \text{als nullten Term:} & f(0,0) & = & 0, \\ \text{als ersten Term:} & \nabla f(0,0) & = & (0,0)^\top,\ \text{demnach}\ (\nabla f(0,0))^\top (x,y)^\top = 0, \end{array}$$

sowie

$$\begin{aligned} H_f(0,0) &= \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

sodaß wir als zweiten Taylorterm $\frac{1}{2}\,(x,y)\,H_f(0,0)\,(x,y)^\top = x^2 - 2xy + y^2$, also wieder $f(x,y)$ erhalten.

Die Hesse-Matrix $H_f(0,0)$ hat die EV-EW-Paare $(v_1,\lambda_1) = ((1,-1)^\top, 2)$ sowie $(v_2,\lambda_2) = ((1,1)^\top, 0)$.

Dies – in Verbindung mit der Tatsache, daß alle höheren Taylorterme wegfallen, und die Taylorreihe tatsächlich in einer Umgebung von $(0,0)$ gilt! – bedeutet, daß in $(1,1)$-Richtung eine Talsohle verläuft (die zweite Richtungsableitung entlang v_2 ist 0), während in $(1,-1)$-Richtung das Gelände ansteigt.

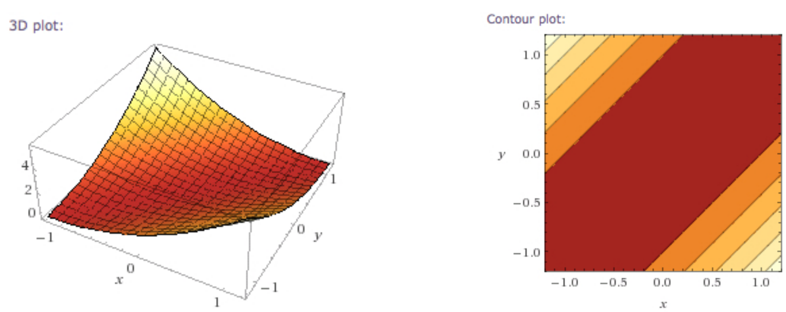
Zur Klärung und Korrektur: Allein daraus, daß die Hessematrix positiv *semi*definit ist, folgt noch nicht, daß an der betrachteten Stelle ein lokales Minimum vorliegt. Dies ist bereits an einem eindimensionalen Beispiel zu sehen: Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist die “Hessematrix” an der Stelle $x = 0$ einfach die Zahl 0, also eine positiv semidefinite (1×1)-Matrix; es liegt jedoch kein Minimum, sondern ein Sattelpunkt vor.

Ebenfalls nicht hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Minimums ist eine positiv semidefinite Hessematrix mit mindestens einem echt positiven Eigenwert, wie in mindestens einem Tutorium fälschlich behauptet. Ein Gegenbeispiel hierzu ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^3 y^2$ an der kritischen Stelle $(0,0)$.

Somit ist festzuhalten: Wird zur Beurteilung eines stationären Punktes allein die Hessematrix herangezogen, so gilt:

- Eine positiv definite Matrix (nur echt positive Eigenwerte) ist hinreichend für ein lokales Minimum,
- eine negativ definite Matrix (nur echt negative Eigenwerte) ist hinreichend für ein lokales Maximum,
- eine indefinite Matrix (sowohl echt positive als auch echt negative Eigenwerte) ist hinreichend für einen Sattelpunkt,
- eine positiv bzw. negativ semidefinite Hessematrix (nur nichtnegative bzw. nichtpositive EW) ermöglicht keine Aussage,
- eine positiv semidefinite Matrix mit mindestens einem positiven Eigenwert schließt ein lokales Maximum aus,
- eine negativ semidefinite Matrix mit mindestens einem negativen Eigenwert schließt ein lokales Minimum aus.

Untenstehend noch einmal eine grafische Darstellung des ursprünglichen Beispiels[1]:



(a) Perspektivisch (b) Höhenlinien

SCHAUBILD: DIE BETRACHTETE FUNKTION $f(x, y)$

[1] alle Bilder erzeugt mit WolframAlpha