1. Klausur zur Analysis 2 im Sommersemester 2013

Mit kleinen Anpassungen an die Vorlesung im Wintersemester 2013/14

Zeit: 120 min
Hilfsmittel: Ein DinA4 Blatt mit handgeschriebenen Aufzeichnungen. Beachte: Kein Taschenrechner.

1. Berechne, falls existent, folgende bestimmte Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$.   (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$.   (5+5=10 Punkte)

2. Untersuche die folgende Funktionenreihe bzw. -folge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf dem jeweils angegeben Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Untersuche, falls existent, die Grenzfunktion auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{2^k}$, $I = \mathbb{R}$.   (b) $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$, $I = [-1, 1]$.

   (5+7=12 Punkte)

3. Bestimme für folgende Punktmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ jeweils das Innere $\mathring{M}$, die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ und den Rand ∂M . Entscheide, ob M offen, abgeschlossen, kompakt oder zusammenhängend ist [ohne Beweis].

   (a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z < 1 \right\}$.

   (b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in [0, 4\pi] \right\}$.

   (c) $M = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$.   (5+5+5=15 Punkte)

4. Bestimme, falls existent, das Maximum und das Minimum der Funktion $f(x, y) = 2x + y - x^2 - y^2$ auf der Menge $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 5 \right\}$.   (12 Punkte)

5. Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, und die Hesse-Matrix $H_f(x)$ sei positiv semidefinit für alle $x \in \mathbb{R}^n$, d.h.

   $$c^T H_f(x)\, c \geq 0 \text{ für alle } x, c \in \mathbb{R}^n.$$

   Zeige. $f(x) \geq f(a) + \operatorname{grad} f(a)(x - a)$ für alle $x, a \in \mathbb{R}^n$.   (12 Punkte)

6. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige: f ist eine auf $\mathbb{R}^2$ lokal injektive und offene Abbildung.

(b) Berechne $(f^{-1})'(u,v)$ für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (8+7=15 Punkte)

7. Berechne das Volumen $|M|$ und das Integral $\int_M f$ für

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le z \le 2 \right\} \quad \text{und} \quad f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

(6+8=14 Punkte)

8. Entscheide, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.
Die Punkte für diese Aufgabe werden wie folgt vergeben:

richtig angekreuzt	1	Punkt
nicht angekreuzt	0	Punkte
falsch angekreuzt	-1	Punkt

Bei negativem Punktesaldo werden für diese Aufgabe 0 Punkte vergeben.

(1) Jede auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion besitzt dort eine Stammfunktion.

(2) Jede beschränkte Funktion ist Riemann-integrierbar.

(3) Aus der Existenz und Stetigkeit aller partiellen Ableitungen folgt die totale Differenzierbarkeit.

(4) Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

(5) Das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt.

(6) Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen folgt die Stetigkeit.

(7) Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede ihrer offenen Überdeckungen eine endliche Teilüberdeckung enthält.

(8) Eine Funktion ist genau dann Riemann-integrierbar über ein kompaktes Intervall, wenn sie dort beschränkt ist und die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Lebesguesche Nullmenge ist.

(9) Jede Lebesguesche Nullmenge ist kompakt.

(10) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. (10 Punkte)