26. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f_n : M \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die punktweise gegen die Grenzfunktion $f : M \to \mathbb{R}$ konvergiere. (2x2)

(a) Zeige, dass die Folge (f_n) genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn für jede Folge $(x_n) \subset M$ gilt: $\lim f_n(x_n) - f(x_n) = 0$.

Nun sei $M = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und die Funktionen f_n stetig.

(b) Zeige, dass die Folge (f_n) genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn für jede konvergente Folge (x_n) aus M gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

Lösung:

(a) Es sei (f_n) gleichmäßig konvergent gegen f und $(x_n) \subset M$ eine Folge. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, was zu zeigen war.

Nun sei (f_n) nicht gleichmäßig konvergent gegen f. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $m(n) \geq n$ und ein $x_{m(n)}$ gibt mit $|f_{m(n)}(x_{m(n)}) - f(x_{m(n)})| \geq \varepsilon$. Ergänzt man die auf diese Weise definiere Folge $(x_{m(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ auf beliebige Weise zu einer Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, so konvergiert die Folge $f_m(x_m) - f(x_m)$ also nicht gegen 0.

(b) Es sei (f_n) gleichmäßig konvergent gegen f und $(x_n) \subset M$ eine konvergente Folge mit $x := \lim x_n$. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Da die Grenzfunktion f nach Vorlesung stetig ist, existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$. Insgesamt gilt für alle $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ dass

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$$

was zu zeigen war.

Um die Umkehrung zu zeigen gelte also $\lim f_n(x_n) = f(\lim x_n)$ für jede konvergente Folge $(x_n) \subset M$. Wir zeigen zunächst, dass f stetig ist. Wäre dies nicht der Fall, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, ein $x \in M$ und eine Folge $(x_n) \subset M$ mit $\lim x_n = x$ und $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ wähle nun $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $|f_{m_1}(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon/2$ und definiere $y_k := x_1$ für alle $1 \leq k \leq m_1$. Nun wähle für $n = 2$ ein $m_2 > m_1$ derart, dass $|f_{m_2}(x_2) - f(x_2)| < \varepsilon/2$ und definiere $y_k := x_2$ für alle $m_1 < k \leq m_2$. Fährt man so induktiv fort, erhält man eine monoton wachsende Folge $(m_k) \subset \mathbb{N}$ und eine Folge $(y_k) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim y_k = x$ und

$$|f_{m_k}(y_{m_k}) - f(y_{m_k})| = |f_{m_k}(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist also

$$|f_{m_k}(y_{m_k}) - f(x)| \geq |f(y_{m_k}) - f(x)| - |f_{m_k}(y_{m_k}) - f(y_{m_k})| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insbesondere konvergiert $f_n(y_n)$ nicht gegen $f(x)$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir nehmen nun, dass (f_n) nicht gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass es für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $n \geq m$ sowie ein $x_n \in M$ gibt mit $|f(x_n) - f_n(x_n)| \geq \varepsilon$. Wegen der Kompaktheit von M existiert eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit Grenzwert $x := \lim x_{n_k}$. Wir setzen nun $y_1 = x_1$ und

$$y_n := \begin{cases} x_{n_k} & n = n_k \\ y_{n-1} & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Dann ist $\lim y_n = x$ und wegen der Stetigkeit von f existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|f(x_{n_k}) - f(x)| \leq \varepsilon/2$ für alle $k \geq k_0$. Insgesamt erhalten wir wegen

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x)| \geq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| - |f(x_{n_k}) - f(x)| \geq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| - \varepsilon/2 \geq \varepsilon/2$$

für alle $k \geq k_0$, dass $f_n(y_n) - f(x) \not\to 0$ für $n \to \infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung.