



Übungen zur Analysis 2

Auf diesem Übungsblatt soll der Kernstoff der Differenzialrechnung (Ende SS 2013) wiederholt werden. Mit der Technik des Differenzierens seid ihr hoffentlich vertraut (wenn nicht, einüben! z.B. anhand der Aufgabe 50 von Blatt 12 des letzten Semesters).

Die Übungsblätter sind in diesem Semester jeweils bis Montag 12:30 Uhr in den Briefkasten vor dem H3 zu werfen.

1. Es sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := e^{-2x} + \cos(5x) - 7x$. (6)

(a) Zeigen, dass f bijektiv ist.

(b) Nach (a) ist f umkehrbar und wegen $f(0) = 2$ ist dann $f^{-1}(2) = 0$. Mit welcher Steigung verläuft der Graph von f^{-1} durch den Punkt $(2, 0)$?

2. Zeige, dass (4)

$$\frac{x-y}{x} \leq \log\left(\frac{x}{y}\right) \leq \frac{x-y}{y}$$

für alle $0 < y < x$.

3. Zeige, dass (6)

$$\min_{x \in [0,1]} (x^2 - 1)e^{-2x} \quad \text{und} \quad \max_{x \in [0,1]} (x^2 - 1)e^{-2x}$$

existieren und berechne diese Werte.

4. Berechne, falls existent, die folgenden Grenzwerte. (6)

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sinh x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos(3x)}$

(b) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \notin \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}}} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\tan x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{\sinh x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x$ für festes $\alpha > 0$.