Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 13/14

24 Punkte

Übungen zur Analysis 2

Blatt 13

55. Entscheide, ob die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, (4)

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} \sin x \cosh y \\ \cos x \sinh y \end{pmatrix}$$

in einer Umgebung von $\begin{pmatrix} \pi/4 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt und berechne ggf. $(f^{-1})'(u, v)$ für $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = f(\pi/4, 0)$.

56. Für $G \subset \mathbb{R}^2$ sei $f : G \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch (4×2)

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

(a) Es sei $G := \mathbb{R}^2$. Zeige, dass $\det f'(x) > 0$ für alle $x \in G$, f aber nicht injektiv ist.

(b) Es sei von nun an $G := \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$. Bestimme $f(G)$. Zeige, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(G) \to G$ existiert und auf $V := f(\mathring{G})$ differenzierbar ist.

(c) Berechne $f^{-1}(u, v)$ für $(u, v)^T \in f(G)$.

(d) Berechne $(f^{-1})'(u, v)$ für $(u, v)^T \in f(G)$.

57. Zeige, dass das Gleichungssystem (6)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2z^2 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

lokal bei $(1, 1, 1)$ durch differenzierbare Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ aufgelöst werden kann. Bestimme $y'(x)$ und $z'(x)$ in Abhängigkeit von x, $y(x)$ und $z(x)$.

58. Zeige oder widerlege: Jede stetige und surjektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bildet offene Mengen auf offene Mengen ab. (2)

59. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Zeige: (2+2)

(a) Die Funktion f ist monoton.

(b) Die Funktion f bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.