Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 13/14

25 Punkte

Übungen zur Analysis 2

Blatt 9

38. Zeige durch Angabe einer Überdeckung mit offenen Mengen, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt, dass die Menge (2)

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

nicht kompakt ist.

39. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Beweise die folgenden Aussagen. (4+4)

(a) M ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge $(x_n) \subset M$ gilt $\lim x_n \in M$.

(b) M ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n) \subset M$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k}) \subset M$ besitzt mit $\lim x_{n_k} \in M$.

40. Es seien $N \subset \mathbb{R}^n$ und $M \subset R^m$ kompakte Mengen. (3+3)

(a) Zeige, dass $N \times M$ kompakt ist.

(b) Zeige, dass $x, y \in M$ mit $\|x - y\| = d(M)$ existieren.
Hinweis: Betrachte eine stetige Abbildung auf $M \times M$.

41. Entscheide für nachfolgend gegebene Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jeweils, ob für alle $a, v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ die Richtungsfunktionen von f bei a in Richtung v stetig sind. Entscheide außerdem, ob f selbst stetig ist. (2+3)

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^4 - zy + \sin(xy) \\ xe^z \cos z \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \begin{cases} \frac{yx^2}{x^4+y^2} & x^4 + y^2 > 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$

42. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Zeige, dass die Umkehrfunktion (4)

$$f^{-1} : f(K) \to \mathbb{R}^n$$

stetig ist.