Universität Ulm
Besprechung der Lösungen:
Montag, 16.01.14

Prof. Dr. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 13/14

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 10

38. Es sei E ein reflexiver Banachraum und $\varphi \in E'$. Zeige, dass ein $x \in E$ mit $\|\varphi\| = |\langle \varphi, x\rangle|$ existiert.

39. Finde einen Maßraum (Ω, Σ, μ), sodass $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ nicht ordnungsvollständig ist.

40. Es sei E ein Banachverband. Ein Unterraum $F \subset E$ heißt *Ideal*, falls für $x \in E$ und $y \in F$ mit $|x| \leq |y|$ stets $x \in F$ folgt.

Es sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, $1 \leq p < \infty$ und $L^p := L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

(a) Zeige, dass für jede Menge $A \in \Sigma$

$$F_A := \{f \in L^p : f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in A\}$$

ein abgeschlossenes Ideal ist.

(b) Zeige, dass für jedes abgeschlossene Ideal $F \subset L^p$

$$\sup\{|f| \wedge \mathbb{1} : f \in F\} \in F.$$

(c) Zeige, dass es für jedes abgeschlossene Ideal $F \subset L^p$ eine Menge $A \in \Sigma$ gibt, sodas

$$F = \{f \in L^p : f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in A\}.$$

Verwende zur Lösung der folgenden Aufgaben ggf. einen der Trennungssätze von Hahn-Banach, die im Januar in der Vorlesung vorgestellt werden.

41. Es sei E eine Banachverband und $x \in E$. Zeige, dass $x \in E_+$ genau dann, wenn $\langle x', x\rangle \geq 0$ für alle $x' \in E'_+$.

42. Es sei E ein Banachraum und $A \subset E$ abgeschlossen, konvex und nicht leer. Beweise folgende Behauptungen.

(a) Für jede Folge $(x_n) \subset E$ mit $x_n \rightharpoonup x$ ist $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(b) Ist E reflexiv, so gibt es für alle $x \in E$ ein $y \in A$ mit

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in A\}.$$

(c) Ist (die Norm von) E gleichmäßig konvex, so gibt es für alle $x \in E$ genau ein $y \in A$ mit

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in A\}.$$

Frohe Weihnachten und alles Gute für 2014!