Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 11

43. Zeige oder widerlege folgenden Trennungssatz: Es sei E ein Banachraum und $C \subset E$ konvex und $x \in E \setminus C$. Dann gibt es eine Hyperebene, die C und $\{x\}$ strikt trennt.

44. Es sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\varphi, \psi : E \to \mathbb{R}$ lineare Abbildung. Zeige:

(a) Falls $\ker \psi \subset \ker \varphi$, so ist $\varphi = \lambda\psi$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$.

(b) Ist ψ unstetig, so ist $\ker \psi$ dicht in E und $(\overset{\circ}{\ker}\,\psi) = \emptyset$.

45. Es sei E ein normierter Vektorraum und $C \subset E$ konvex. Zeige:

(a) $\mathring{C}$ ist konvex.

(b) Ist $\mathring{C} \neq \emptyset$, so ist $\overline{\mathring{C}} = \overline{C}$.

46. Es sei E ein normierter Vektorraum und $C \subset E$ konvex. Entscheide jeweils, ob es für jedes $x \in \partial C$ ein Funktional $\varphi \in E' \setminus \{0\}$ gibt mit $\varphi(y) \leq \varphi(x)$ für alle $y \in C$, falls

(a) $\mathring{C} = \emptyset$.

(b) $\mathring{C} \neq \emptyset$.