Universität Ulm
Besprechung der Lösungen:
Montag, 03.02.14

Prof. Dr. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 13/14

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 12

47. Es sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum und $M \subset C(K)$ relativ kompakt. Zeige, dass M gleichgradig stetig und beschränkt ist.

48. Es sei X ein Banachraum und $T, S \in \mathscr{L}(X)$. Beweise folgende Identitäten:

(a) Für alle $\lambda, \mu \in \varrho(T)$ ist

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)R(\lambda, T)R(\mu, T)$$

und insbesondere $R(\lambda, T)R(\mu, T) = R(\mu, T)R(\lambda, T)$.

(b) Für alle $\lambda \in \varrho(T) \cap \varrho(S)$ ist

$$R(\lambda, S) - R(\lambda, T) = R(\lambda, S)(S - T)R(\lambda, T)$$

und insbesondere $R(\lambda, T)T = TR(\lambda, T)$.

49. Für eine Folge $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ und $x \in \ell^2$ definieren wir $Tx := (\lambda_n x_n)$.

(a) Zeige, dass T genau dann einen stetigen Operator auf ℓ^2 definiert, wenn $(\lambda_n) \in \ell^\infty$.

(b) Bestimme $\sigma_p(T)$ und $\sigma(T)$.

(c) Zeige, dass es für jede nicht-leere kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$ einen Operator $S \in \mathscr{L}(\ell^2)$ mit $\sigma(S) = K$ gibt.

50. Es sei $Lx := (x_2, x_3, \dots)$ der *Linksshift* und $Rx := (0, x_1, x_2, \dots)$ der *Rechtsshift* auf ℓ^2. Zeige:

(a) $L^* = R$ und $R^* = L$.

(b) L und R sind nicht normal.

(c) $\sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ und $\sigma_p(R) = \emptyset$.

(d) $\sigma(L) = \sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.