Universität Ulm
Besprechung der Lösungen:
Montag, 10.02.14

Prof. Dr. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 13/14

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 13

51. Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathscr{L}(X)$ mit $\|T\| \in \sigma(T)$. Zeige, dass $\|I+T\| = 1+\|T\|$.

52. Es sei $(\lambda_n) \in \ell^\infty$ und $p \in [1,\infty)$. Wir definieren $T \in \mathscr{L}(\ell^p)$ durch $Tx := (\lambda_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige:

(a) T hat genau dann endlichen Rang, wenn $(\lambda_n) \in c_{00}$.

(b) T ist genau dann kompakt, wenn $(\lambda_n) \in c_0$.

53. Es sei X ein Banachraum und $T \in \mathscr{L}(X)$ kompakt und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeige, dass der Operator $\lambda - T$ genau dann injektiv ist, wenn er surjektiv ist.

54. Für $k : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiere $(Tf)(x) := \int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$. Zeige:

(a) T ist ein kompakter Operator von $L^1([0,1])$ nach $C([0,1])$, falls $k \in C([0,1]^2)$.
Hinweis: Verwende den Satz von Arzelà-Ascoli.

(b) T ist ein kompakter Operator von $L^2([0,1])$ nach $L^2([0,1])$, falls $k \in C([0,1]^2)$.

(c) T ist ein kompakter Operator von $L^2([0,1])$ nach $L^2([0,1])$, falls $k \in L^\infty([0,1]^2)$ ist.

55. Zeige, dass die Abbildung

$$(Tf)(x) := \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

einen kompakten Operator auf $C([0,1])$ definiert. Zeige, dass $\sigma_p(T) = \emptyset$ und $\sigma(T) = \{0\}$.

Wir möchten alle Teilnehmer der Vorlesung herzlich zu unserem

Masterseminar “Funktionalanalysis”

im kommenden Sommersemester einladen. Weitere Informationen auf unserer Webseite unter
`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss14/fasem.html`