Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 2

5. Berechne die Operatornorm einer Matrix $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn

(a) der Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $\|x\| = \max_{k=1,\dots,n}|x_k|$ versehen ist.

(b) der Raum $\mathbb{R}^n$ mit der 1-Norm $\|x\|_1 = \sum_{k=1,\dots,n}|x_k|$ versehen ist.

Zeige, dass es keine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gibt, sodass die durch

$$\|A\|_\infty := \sup_{i,j=1,\dots,n} |a_{i,j}|$$

definierte Matrixnorm die induzierte Operatornorm ist.

6. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $S,T \in \mathscr{L}(X)$ und S invertierbar. Wir definieren die Norm $\|\cdot\|_S$ durch $\|x\|_S := \|Sx\|$.

(a) Zeige: T ist ein beschränkter Operator auf $(X, \|\cdot\|_S)$ und seine Norm $\|T\|_S$ erfüllt

$$\|T\|_S = \|STS^{-1}\| \leq \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|S^{-1}\|.$$

(b) Entscheide, ob in (a) sogar stets Gleichheit vorliegt.

7. Auf dem reellen Vektorraum

$$C^1[a,b] := \{f \in C[a,b] : f \text{ ist stetig differenzierbar auf } (a,b) \text{ und } f' \in C[a,b]\}$$

betrachten wir die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ sowie die durch

$$|||f||| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad (f \in C^1[a,b])$$

definierte Norm. Entscheide, ob es sich bei $(C^1[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ und $(C^1[a,b], |||\cdot|||)$ um Banachräume handelt.

Nun betrachten wir die Abbildungen $D : C^1[a,b] \to C[a,b]$ und $J : C[a,b] \to C^1[a,b]$, gegeben durch $Df := f'$ und

$$(Jf)(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Entscheide jeweils, ob D und J stetig und invertierbar sind, wenn man $C^1[a,b]$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ und $|||\cdot|||$ versieht.

8. Zeige, dass die Banachräume c und c_0 isomorph sind, d.h. dass es eine invertierbare Abbildung $S \in \mathscr{L}(c, c_0)$ mit $Sc = c_0$ gibt.