Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 3

9. Wir betrachten den Prähilbertraum $C[0,1]$ mit dem Skalarprodukt

$$(f|g) := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Bestimme die orthogonale Projektion der Funktionen $f_1(t) = t$, $f_2(t) = 2t - 1$ und $f_3(t) := \sin(2\pi t)$ auf den Unterraum der konstanten Funktionen.

10. Finde jeweils ein Beispiel für

(a) einen beschänkten Operator $T \in \mathscr{L}(X)$ auf einem Banachraum X mit $\|Tx\| < \|T\| \cdot \|x\|$ für alle $x \in X$, $x \neq 0$.

(b) einen Banachraum X mit abgeschlossenen Unterräumen $U, V, W \subset X$ mit $V \neq W$ und $X = U \oplus V$ sowie $X = U \oplus W$.

(c) einen Banachraum X und eine Folge $(x_n) \subset X$ mit $\|x_n\| \leq 1$, die keine konvergente Teilfolge besitzt.

11. Zeige, dass es auf jedem Banachraum X mit $\dim X = \infty$ eine stetige unbeschränkte Funktion $f : \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \to \mathbb{R}$ gibt.

Hinweis: Verwende zur Konstruktion eine beschränkte Folge ohne konvergente Teilfolge.

12. Es sei X ein separabler normierter Vektorraum. Zeige, dass jeder Unterraum von X ebenfalls separabel ist.