Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 4

13. Wir betrachten den Banachraum

$$L^2_{\text{per}} := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ messbar} : f(t) = f(t+1) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt $(f|g) := \int_0^1 f(t)\overline{g}(t)\, \mathrm{d}t$. Da

$$C_{\text{per}} := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ stetig} : f(t) = f(t+1) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \} \cong C_{\text{per}}[0,1]$$

dicht in L^2_{per} ist, ist $\{e_k(t) = e^{2\pi i k t} : k \in \mathbb{Z}\}$ auch eine Orthonormalbasis von L^2_{per}.

(a) Berechne die Fourierkoeffizienten der Funktion $f \in L^2_{\text{per}}$, die auf $[0,1)$ durch $f(x) = 1$ für $x \in [0, 1/2]$ und $f(x) = 0$ für $x \in (1/2, 1)$ gegeben ist.

(b) Zeige, mit Hilfe der Parseval'schen Gleichung, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

(c) Berechne den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

14. Wir betrachten den reellen Hilbertraum ℓ^2. Bestimme die orthogonale Projektion auf die abgeschlossene konvexe Menge

$$C := \{ (t_n) \in \ell^2 : t_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \}.$$

15. Wir beweisen einen einfachen Spezialfall des Satzes von Dvoretzky–Roger. Es sei H ein separabler Hilbertraum mit $\dim H = \infty$. Zeige, dass es eine Folge $(x_n) \subset H$ gibt, sodass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ unbedingt konvergiert, aber $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = \infty$.

16. Es sei X ein normierter Raum und $x_n, x \in X$. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ genau dann unbedingt gegen x konvergiert, wenn

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_{\pi(n)} = x$$

für jede Bijektion $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.