Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 5

17. Zeige, dass es keine Norm gibt, die den Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ zu einem Banachraum macht.

18. Es seien X, Y, Z Banachräume und $T_n, T \in \mathscr{L}(X, Y)$ sowie $S_n, S \in \mathscr{L}(Y, Z)$ derart, dass $\lim T_n x = Tx$ für alle $x \in X$ und $\lim S_n y = Sy$ für alle $y \in Y$. Zeige, dass $\lim S_n T_n x = STx$ für alle $x \in X$.

19. Es seien X und Y Banachräume. Wir versehen das Produkt $X \times Y$ mit der Norm $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

(a) Zeige, dass $X \times Y$ ein Banachraum ist.

Nun sei $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear und partiell stetig, d.h. $B(x, \,\cdot\,)$ ist linear und stetig für alle $x \in X$ und $B(\,\cdot\,, y)$ ist linear und stetig für alle $y \in Y$.

(b) Zeige, dass B stetig ist.

20. Es seien X und Y Banachräume. Wir bezeichnen mit $\mathscr{R}(X, Y)$ die Menge aller injektiven Operatoren aus $\mathscr{L}(X, Y)$, deren Bild ein abgeschlossener Unterraum von Y ist.

(a) Es sei $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Zeige, dass $T \in \mathscr{R}(X, Y)$ genau dann, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, sodass $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$ für alle $x \in X$.

(b) Zeige, dass $\mathscr{R}(X, Y)$ eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(X, Y)$ ist.

21. Es sei X ein Banachraum und $f : [0, \infty) \to \mathscr{L}(X)$ derart, dass es für alle $x \in X$ ein $\varepsilon_x > 0$ und ein $M_x \geq 0$ gibt, sodass $\|f(t)x\| \leq M_x e^{-\varepsilon_x t}$ für alle $t \geq 0$.

Zeige, dass es ein $\varepsilon > 0$ und ein $M \geq 0$ gibt, sodass

$$\|f(t)\| \leq M e^{-\varepsilon t}$$

für alle $t \geq 0$.

Hinweis: Verwende den Satz von Baire wie im Beweis des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit.

22. **Bonusaufgabe:** Eine Teilmenge M eines metrischen Raums heißt G_δ*-Menge*, wenn sich M als Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen schreiben lässt. Zeige, dass $\mathbb{Q}$ keine G_δ-Menge in $\mathbb{R}$ ist.