Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 7

27. Es sei Ω ein lokal kompakter topologischer (oder metrischer) Raum. Zeige, dass $C_0(\Omega)$ versehen mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist.

28. (a) Wir versehen $\mathbb{N}$ mit der diskreten Metrik

$$d(n,m) := \begin{cases} 1 & n \neq m \\ 0 & n = m. \end{cases}$$

Zeige, dass $(\mathbb{N}, d)$ ein lokal kompakter Raum ist.

(b) Zeige, dass $c_0' \cong \ell^1$.

(c) Auf $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definieren wir die Metrik

$$d(n,m) := \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$$

mit der Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$. Zeige, dass $(\overline{\mathbb{N}}, d)$ ein kompakter metrischer Raum ist.

(d) Zeige, dass $c' \cong \ell^1$.

29. Es sei H ein komplexer (!) Hilbertraum. Zeige, dass H isometrisch isomorph zu seinem Dualraum H' ist.

30. Es sei $(s_n) \subset \mathbb{R}$ derart, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n$ für alle $(t_n) \in \ell^2$ konvergiert. Zeige, dass $(s_n) \in \ell^2$.