Übungen zur Funktionalanalysis

31. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $1 \leq p < \infty$,

$$E := \operatorname{span}\{\mathbb{1}_A : A \in \Sigma\} \quad \text{und} \quad E_0 := \operatorname{span}\{\mathbb{1}_A : A \in \Sigma,\ \mu(A) < \infty\}.$$

(a) Zeige, dass E ein dichter Unterraum von $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist.

(b) Es sei $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Zeige, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $c > 0$ gibt, sodass

$$\int_{\{|f| \geq c\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

(c) Zeige, dass E_0 ein dichter Unterraum von $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist.

(d) Gib ein Beispiel dafür an, dass im Allgemeinen E_0 nicht dicht in $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist.

(e) Es sei (Ω, Σ, μ) derart, dass es für alle $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) > 0$ eine Menge $B \in \Sigma$ mit $B \subset A$ und $0 < \mu(B) < \infty$ gibt. Zeige, dass (Ω, Σ, μ) σ-endlich ist, falls $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ separabel ist.

(f) Zeige, dass ℓ^∞ nicht separabel ist.

32. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{F} \subset \Sigma$ eine weitere σ-Algebra. Wir bezeichnen mit $\mu_{\mathscr{F}}$ die Einschränkung von μ auf $\mathscr{F}$.

(a) Zeige, dass für alle $f \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu_{\mathscr{F}})$ und alle $A \in \mathscr{F}$

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu_{\mathscr{F}} = \int_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Hinweis: Verwende die Approximation messbarer durch einfache Funktionen aus der Maßtheorie.

(b) Es sei $1 \leq p < \infty$. Zeige, dass $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu_F)$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist.

(c) Zeige, dass es für alle $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein $f_0 \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ gibt, sodass

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f_0 \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $A \in \mathscr{F}$. Die Funktion f_0 heißt die *bedingte Erwartung von f gegeben* $\mathscr{F}$. Zeige weiter, dass f_0 μ-fast überall eindeutig bestimmt ist.

(d) Zeige, dass für alle $f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, die bedingte Erwartung f_0 die orthogonale Projektion von f auf $L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ ist.

(e) Es sei $(A_n) \subset \Sigma$ eine Partition von Ω und $\mathscr{F} := \sigma(\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$. Bestimme (d.h. "rate und verifiziere") die bedingte Erwartung einer Funktion $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ gegeben $\mathscr{F}$.