Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 9

33. Es seien E und F normierte Räume und $T \in \mathscr{L}(E, F)$. Zeige, dass $\dim TE < \infty$ genau dann, wenn es endliche Folgen $x'_1, \ldots, x'_n \in E'$ und $y_1, \ldots, y_n \in F$ gibt mit

$$T = \sum_{k=1}^{n} x'_k \otimes y_k,$$

d.h. $Tx = \sum_{k=1}^{n} \langle x'_k, x \rangle y_k$ für alle $x \in E$.

34. (a) Es sei K kompakt und $f_n, f \in C(K)$. Zeige, dass $f_n \rightharpoonup f$ genau dann, wenn $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ und $\lim f_n(t) = f(t)$ für alle $t \in K$.

(b) Es sei $1 < p < \infty$ und $x_n, n \in \ell^p$. Zeige, dass $x_n \rightharpoonup x$ genau dann, wenn $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_p < \infty$ und $x_n^{(k)} \to x^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

35. Es sei E ein Banachraum und $x', x'_n \in E'$. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen.

(a) Falls $x'_n \rightharpoonup^* x'$, so $x'_n \rightharpoonup x'$

(b) Falls $x'_n \rightharpoonup x'$, so $x'_n \rightharpoonup^* x'$

36. Es seien E und F Banachräume und $T : E \to F$ linear. Untersuche, (durch Angabe eines Beweises oder eines Gegenbeispiels) welche Implikationen zwischen den folgenden Aussagen gelten.

(i) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$

(ii) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$

(iii) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \to Tx$

(iv) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$

37. Es sei E ein Banachraum und $\{e_n : \|e_n\| \leq 1,\ n \in \mathbb{N}\} \subset E$ total. Definiere auf $B_{E'}$ die Metrik

$$d(x', y') := \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x' - y', e_k \rangle| \cdot 2^{-k}.$$

Zeige, dass für $x'_n, x' \in B_{E'}$ gilt:

$$x'_n \rightharpoonup^* x' \iff d(x'_n, x') \to 0.$$