BANACHVERBÄNDE UND POSITIVE OPERATOREN

1. Banachverbände

Definition 1.1. Es sei M eine Menge. Eine Relation $\leq$ auf M heißt *partielle Ordnung*, falls

- $x \leq x$ (Reflexivität)
- $x \leq y$ und $y \leq x$ impliziert, dass $x = y$ (Antisymmetrie)
- $x \leq y$ und $y \leq z$ impliziert, dass $x \leq z$ (Transitivität)

für alle $x, y, z \in M$.

Es sei nun M partiell geordnet und $A \subset M$. Ein Element $y \in M$ heißt *obere (untere) Schranke* von M, falls $y \leq x$ ($y \geq x$) für alle $x \in A$. Besitzt A eine obere (untere) Schranke besitzt, so heißt A *nach oben (unten) beschränkt.* Eine untere (obere) Schranke von A, die größer (kleiner) als jede andere untere (obere) Schranke von A ist, heißt *Supremum (Infimum) von A*; Bezeichnung: $\sup A$ bzw. $\inf A$. Wir schreiben $x \wedge y := \inf\{x, y\}$ und $x \vee y := \sup\{x, y\}$.

Eine partiell geordnete Menge M heißt *Verband*, falls $x \wedge y$ und $x \vee y$ für alle $x, y \in M$ existieren.

Ein reeller Vektorraum E versehen mit einer partiellen Ordnung $\leq$ heißt *Vektorverband* (oder *Rieszraum*), falls E ein Verband ist und folgendes gilt:

- $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
- $x \leq y \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$

für alle $x, y, z \in E$, und alle $\alpha \geq 0$. In einem Vektorverband definieren wir

$$x^+ := x \vee 0, \quad x^- := -(x \wedge 0) \quad \text{und} \quad |x| = x \vee (-x).$$

Die Menge

$$E_+ := \{x \in E : x \geq 0\}$$

heißt *positiver Kegel* von E und ihre Elemente *positive Vektoren.*

Ein Banachraum E heißt Banachverband, falls E ein Vektorverband ist mit

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

für alle $x, y \in E$.

Beispiel 1.2. (a) Es sei K ein kompakter topologischer Raum, dann ist $C(K)$ ein Banachverband bzgl. der partiellen Ordnung

$$f \leq g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in K.$$

Es ist $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ und $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ für alle $f, g \in C(K)$.

(b) Für jeden Maßraum (Ω, Σ, μ) und alle $1 \leq p \leq \infty$ ist $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein Banachverband bzgl. der Ordnung

$$f \leq g :\Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ für fast alle } x \in \Omega.$$

Für $f, g \in L^p$ ist $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ und $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

(c) Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum. Dann ist $\mathscr{M}(\Omega, \Sigma)$, die signierten Maße auf (Ω, Σ), ein Banachverband bzgl. der mengenweisen Ordnung

$$\mu \leq \nu :\Leftrightarrow \mu(B) \leq \nu(B) \text{ für alle } B \in \Sigma.$$

und der Variationsnorm. Es ist

$$(\mu \wedge \nu)(B) = \inf\{\mu(A \cap B) + \nu(B \setminus A) : A \in \Sigma\},$$

$$(\mu \vee \nu)(B) = \sup\{\mu(A \cap B) + \nu(B \setminus A) : A \in \Sigma\}$$

und $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$. Die Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ ist gerade die Hahn-Jordan-Zerlegung.

(d) Es seien E und F Vektorverbände, dann ist die Menge der linearen Operatoren von E nach F auf folgende Weise partiell geordnet:

$$T \leq S := Tx \leq Sx \text{ für alle } x \in E_+.$$

Ein linearer Operator heißt *positiv*, falls $T \geq 0$. Wir werden später sehen, welcher Unterraum der linearen Operatoren bzgl. dieser Ordnung sogar ein Verband ist. Beachte, dass $x \mapsto Tx \vee Sx$ keine lineare Abbildung definiert!

Bemerkung 1.3. Es sei E ein Vektorverband E. Dann gilt:

(a) Für alle $x \in E$ ist $x = x^+ - x^-$ und $x^+ \wedge x^- = 0$.
(b) Falls $x = y - z$ mit $y, z \in E_+$ und $y \wedge z = 0$, so ist $y = x^+$ und $z = x^-$.
(c) Für alle $x, y \in E$ ist

$$||x| - |x|| \leq |x - y| \leq |x| + |x|.$$

(d) Für alle $x, y \in E$ ist

$$x \vee y = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{und} \quad x \wedge y = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

(e) Wir bezeichnen mit $[x, y] := \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ das *Ordnungsintervall* von x bis y. Für $x, y \in E_+$ ist

$$[0, x + y] = [0, x] + [0, y].$$

Lemma 1.4. *Es sei E ein Banachverband.*

(a) Die Verbandsoperationen $\wedge$, $\vee$ und $|\cdot|$ sind stetig. Insbesondere ist der positive Kegel E_+ abgeschlossen.
(b) Es sei $x \in E$ eine untere Schranke von $A \subset E$. Wenn es eine Folge $(x_n) \in A$ gibt, die gegen x konvergiert, dann ist $x = \inf A$.

Beweis. Zu (a): Es sei $(x_n) \subset E$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $x = \lim x_n$. Wegen

$$\||x_n| - |x|\| \leq \||x_n - x|\| = \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

ist $\lim |x_n| = |x|$. Die Stetigkeit von $\wedge$ und $\vee$ folgt nun aus Bemerkung 1.3.

Zu (b): Es sei s eine untere Schranke von A. Dann ist auch $y := x \vee s \geq x$ eine untere Schranke von A mit

$$\|x_n - y\| \leq \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Also ist $x = y$ und somit $s \leq x$. □

Satz 1.5. *Es seien E und F Banachverbände (Vollständigkeit von F nicht benötigt) und $T : E \to F$ linear und positiv. Dann ist $T \in \mathscr{L}(E, F)$.*

Beweis. Angenommen T ist nicht beschränkt. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in E$ mit $\|x_n\| \leq 1$ und $\|Tx_n\| \geq n2^n$. Wegen $\|Tx\| \leq \|T|x|\|$ und $\|x\| = \||x|\|$ können wir annehmen, dass $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil E vollständig ist, existiert

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n \in E$$

und es gilt

$$\|Tx\| \geq \left\|T2^{-n}x_n\right\| = 2^{-n}2^n n = n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, was nicht sein kann. □

2. Ordnungsvollständigkeit und ordnungsstetige Norm

Definition 2.1. Eine partiell geordnete Menge A heißt *nach unten gerichtet*, falls es für alle $x, y \in A$ eine $z \in A$ gibt mit $z \leq x, y$ und *nach oben gerichet*, falls $-A$ nach unten gerichtet ist.

Die Norm eines Banachverbands heißt *ordnungsstetig*, falls $\inf\{\|x\| : x \in A\} = 0$ für jede nach unten gerichtete Menge $A \in E$ mit $\inf A = 0$.

Bemerkung 2.2. Es sei E eine Vektorverband und $A \subset E$. Dann haben A und die nach unten gerichtete Menge

$$\tilde{A} := \{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n : x_1, \ldots, x_n \in A,\ n \in \mathbb{N}\}$$

die gleichen unteren Schranken. Insbesondere existiert $\inf A$ genau dann, wenn $\inf \tilde{A}$ existiert und dann ist $\inf A = \inf \tilde{A}$.

Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass für $1 \leq p < \infty$ alle L^p-Räume ordnungsstetige Norm haben.

Satz 2.3. *Es sei $1 \leq p < \infty$ und (Ω, Σ, μ) ein beliebiger Maßraum. Wir schreiben kurz $L^p := L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Dann existiert $g := \inf A$ für jede Menge $A \subset L^p_+$ und es gilt $\|g\| = \inf\{\|f\| : f \in A\}$.*

Beweis. Nach Bemerkung 2.2 können wir annehmen, dass $A \subset L^p_+$ nach unten gerichtet ist. Wir setzen $\alpha := \inf_{f \in A}\|f\|$. Dann gibt es eine Folge $(f_n) \subset A$ mit $\lim\|f_n\| = \alpha$. Weil A gerichtet ist, können wir (f_n) monoton fallend wählen. Nach dem Satz von Lebesgue definiert $g(x) := \inf f_n(x)$ ein Element aus L^p mit $\|g\| = \lim\|f_n\| = \alpha$.

Wir zeigen, dass $g \leq f$ für alle $f \in A$. Angenommen, $g \not\leq f$ für ein $f \in A$. Weil A gerichtet ist, gibt es dann ein $h_n \in A$ mit $h_n \leq f_n, f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können wieder annehmen, dass die Folge (h_n) monoton fällt und definieren $h \in L^p$ durch $h(x) := \inf h_n(x)$. Dann ist $0 \leq h \leq f_n, f$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und deshalb $h \leq g \wedge f < g$. Nun erhalten wir, dass

$$\alpha^p \leq \inf \int_\Omega |h_n|^p \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |h|^p \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f \wedge g|^p \mathrm{d}\mu < \int_\Omega |g|^p \mathrm{d}\mu = \alpha^p,$$

was nicht sein kann. Also ist g eine untere Schranke von A und aus Lemma 1.4 folgt $g = \inf A$. Dies zeigt $\|\inf A\| = \inf\{\|f\| : f \in A\}$ wie behauptet. □

Definition 2.4. Ein Vektorverband heißt *ordnungsvollständig*, falls jede ordnungsbeschränkte Menge ein Infimum und ein Supremum besitzt.

Beispiel 2.5. Es sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum. Dann ist $L^\infty := L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ordnungsvollständig.

Beweis. Es sei $A \subset L^\infty$ eine ordnungsbeschränkte Menge, etwas $f \geq g$ für ein $g \in L^\infty$ und alle $f \in A$. Wir zeigen, dass $\inf A$ existiert.

Zunächst sei $\mu(\Omega) < \infty$. Dann ist $L^\infty \subset L^1$. Indem wir A durch

$$A - g := \{f - g : f \in A\}$$

ersetzen, können wir annehmen, dass $A \subset L^\infty_+$. Nun folgt aus Satz 2.3, dass die Menge A in L^1 ein Infimum besitzt, also $h := \inf A$ existiert in L^1. Weil h durch L^∞-Funktionen dominiert ist, ist $h \in L^\infty$. Umgekehrt ist jede untere Schranke von A in L^∞ insbesondere eine untere Schranke in L^1 ist, ist $h = \inf A$ in L^∞.

Sei nun (Ω, Σ, μ) σ-endlich und $(\Omega_n) \subset \Sigma$ eine Folge disjunkter Mengen mit $\mu(\Omega_n) < \infty$ und $\Omega = \cup\Omega_n$. Wie gesehen existiert $h_n := \inf\{f\mathbb{1}_{\Omega_n} : f \in A\}$. Wir setzen nun

$$h := \sum_{n \in \mathbb{N}} h_n.$$

Wegen $f \geq h \geq g$ für alle $f \in A$ ist $h \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ und man sieht leicht ein, dass $h = \inf A$. □

Bemerkung 2.6. Im Allgemeinen ist $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ nicht ordnungsvollständig. (Übungsaufgabe)

Bemerkung 2.7. Der Raum $C(K)$ ist genau dann ordnungsvollständig, wenn der Abschluss jeder offenen Teilmenge von K offen ist.

Satz 2.8. *Jeder Banachverband mit ordnungsstetiger Norm ist ordnunungsvollständig.*

Beweis. Sei E ein Banachverband mit ordnungsstetiger Norm und $A \subset E$ eine ordnungsbeschränkte Menge. Wir zeigen, dass $\inf A$ existiert. Nach Bemerkung 2.2 können wir annehmen, dass A nach unten gerichtet ist. Es sei $B := \{y \in E : y \leq x \text{ für alle } x \in A\}$ die Menge der unteren Schranken von A. Wir betrachten nun die Menge

$$A - B := \{x - y : x \in A,\ y \in B\}$$

und zeigen, dass $\inf(A - B) = 0$. Offenbar ist 0 eine untere Schranke von $A - B$. Sei s eine beliebige untere Schranke von $A - B$, d.h. $s \leq x - y$ für alle $x \in A$ und $y \in B$. Dann ist $s + y$ für jedes $y \in B$ eine untere Schranke von A und somit in B. Also ist $s \leq x - (s + y)$ für jedes $x \in A$ und $y \in B$, weshalb $2s$ eine untere Schranke von $A - B$ ist. Induktiv sieht man, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ns eine untere Schranke von $A - B$ ist. Insbesondere ist

$$s^+ \leq \frac{1}{n}(x - y)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in A$ und $y \in B$, weshalb $s \leq 0$. Also ist 0 das Infimum von $A - B$.

Für $x_1, x_2 \in A$ und $y_1, y_2 \in B$ ist $x := x_1 \wedge x_2 \in A$ und $y := y_1 \vee y_2 \in B$. Also ist $x - y \in A - B$ kleiner als $x_1 - y_1$ und $x_2 - y_2$. Dies zeigt, dass $A - B$ nach unten gerichtet ist. Nach Voraussetzung ist $\inf\{\|x - y\| : x - y \in A - B\} = 0$. Es gibt also eine Folge $x_n - y_n \in A - B$ mit $\lim\|x_n - y_n\| = 0$. Indem wir x_{n+1} durch $x_n \wedge x_{n+1}$ und y_{n+1} durch $y_n \vee y_{n+1}$ ersetzen, können wir annehmen, dass (x_n) monoton fällt und (y_n) monoton wächst. Wegen

$$0 \leq x_n - x_{n+m} \leq x_n - y_{n+m} \leq x_n - y_n$$

ist (x_n) eine Cauchyfolge. Es sei $x := \lim x_n$. Dann konvergiert auch (y_n) gegen x. Weil

$$B = \bigcap_{x \in A} \{y \in E : y \leq x\}$$

abgeschlossen ist, ist $x \in B$ und somit eine untere Schranke von A. Aus Lemma 1.4 erhalten wir nun, dass $x = \inf A$. Schließlich existiert auch $\sup A = -\inf -A$. □

3. Ordnungsbeschränkte und reguläre Operatoren

Definition 3.1. Es seien E, F Banachverbände und $T : E \to F$ ein linearer Operator. Dann heißt T *ordnungsbeschränkt*, falls er ordnungsbeschränkte Menge auf ordnungsbeschränkte Mengen abbildet. Ferner heißt T *regulär*, falls $T = S - R$ für positive Operatoren $S, R \in \mathscr{L}(E, F)$. Wir bezeichnen mit $\mathscr{L}^r(E, F)$ den Vektorraum der regulären Operatoren von E nach F.

Offenbar ist jeder reguläre Operator ordnungsbeschränkt. Wir werden zeigen, dass die Umkehrung richtig ist, wenn der Bildraum ordnungsvollständig ist.

Lemma 3.2. *Es seien E und F Vektorverbände und $T : E_+ \to F_+$ additiv mit $T(\lambda x) = \lambda T x$ für alle $\lambda \geq 0$ und $x \in E_+$. Dann gibt es genau eine lineare Fortsetzung $S : E \to F$ von T.*

Beweis. Es seien $y_1, y_2, z_1, z_2 \in E_+$ derart, dass $y_1 - z_1 = y_2 - z_2$. Dann ist

$$Ty_1 + Tz_2 = T(y_1 + z_2) = T(y_2 + z_1) = Ty_2 + Tz_1$$

und deshalb $Ty_1 - Tz_1 = Ty_2 - Tz_2$. Für $x \in E$ und $y, z \in E_+$ mit $x = y - z$ definieren wir nun $Sx := Ty - Tz$. Nach der Vorbemerkung ist S wohldefiniert und erfüllt

$$S(x + y) = S(x^+ + y^+ - x^- - y^-) = T(x^+ + y^+) - T(x^- + y^-) = Sx + Sy.$$

Außerdem sieht man leicht, dass $S(\lambda x) = \lambda Sx$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in E$. □

Satz 3.3. *Es seien E und F Banachverbände und F sei ordnungsvollständig. Dann ist $\mathscr{L}^r(E, F)$ ein ordnungsvollständiger Vektorverband, der alle ordnungsbeschränkten Operatoren enthält.*

Beweis. Es sei $T : E \to F$ ordnungsbeschränkt. Wir zeigen, dass $T \in \mathscr{L}^r(E, F)$. Für $x \in E_+$ definiere

$$S(x) := \sup\{Tz : 0 \le z \le x\}.$$

Nach Bemerkung 1.3 ist $[0, x + y] = [0, x] + [0, y]$ und somit

$$S(x + y) = \sup\{Tz_1 + Tz_2 : z_1 \in [0, x],\ z_2 \in [0, y]\} = S(x) + S(y)$$

für alle $x, y \in E_+$. Außerdem ist $S(\lambda x) = \lambda S(x)$ für alle $\lambda \ge 0$ und alle $x \in E_+$. Nach Lemma 3.2 können wir S eindeutig zu einem linearen Operator von E nach F fortsetzen.

Wir zeigen nun, dass $S = T^+ = T \vee 0$. Offenbar ist $S \ge T$ ein positiver Operator. Sei nun $R \ge T$ ein beliebiger positiver Operator. Dann ist wegen

$$Sx = \sup\{Tz : z \in [0, x]\} \le \sup\{Rz : z \in [0, x]\} = Rx$$

auch $S \le R$. Das zeigt, dass $S = T \vee 0 = T^+$. Man rechnet leicht nach, dass $T^- := T - T^+$ tatsächlich $T^- = (-T) \vee 0$ erfüllt und $|T| := T^+ + T^- = T \vee (-T)$. Wegen

$$T \wedge S = \frac{T + S + |T - S|}{2} \quad \text{und} \quad T \vee S = \frac{T + S - |T - S|}{2}$$

ist $\mathscr{L}^r(E, F)$ ein Verband.

Wir zeigen nun, dass $\mathscr{L}^r(E, F)$ ordnungsvollständig ist. Sei dazu $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}^r(E, F)$ nach unten beschränkt. Wie in Bemerkung 2.2 beschrieben können wir annehmen, dass $\mathscr{A}$ nach unten gerichtet ist. Für $x \in E_+$ definieren wir

$$Sx := \inf\{Tx : T \in \mathscr{A}\}.$$

Dann ist $S(\lambda x) = \lambda Sx$ und $S(x + y) = S(x) + S(y)$ für alle $x, y \in E_+$ und $\lambda \ge 0$. In der Tat ist wegen

$$T(x + y) = Tx + Ty \ge S(x) + S(y)$$

$S(x + y) \ge S(x) + S(y)$. Andererseits gibt es für alle $T_1, T_2 \in \mathscr{A}$ ein $T_3 \in \mathscr{A}$ mit $T_1, T_2 \ge T_3$. Dann gilt

$$T_1x + T_2y \ge T_3x + T_3y = T_3(x + y) \ge S(x + y)$$

und deshalb $S(x) + S(y) \ge S(x + y)$. Die eindeutige Fortsetzung von S zu einem linearen Operator auf E nach Lemma 3.2 ist wegen der Beschränktheit von $\mathscr{A}$ wieder ein ordnungsbeschränkter Operator und offenbar die kleinste untere Schranke von $\mathscr{A}$ in $\mathscr{L}^r(E, F)$. □

Bemerkung 3.4. Beachte, dass die Operatornorm $\mathscr{L}^r(E, F)$ im Allgemeinen nicht zu einem Banachverband macht.

4. Ausblick

Satz 4.1. *Es sei E ein Banachverband derart, dass $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ für alle $x, y \in E_+$. Es gebe ferner einen Vektor $z \in E_+$ mit der Eigenschaft, dass es für jedes $x \in E$ ein $c > 0$ gibt, sodass $|x| \leq cz$ (z heißt* Ordnungseinheit*).*

Dann gibt es einen kompakten Raum K, sodass E isometrisch (verbands-)isomorph zu $C(K)$ ist.

Die Norm eines Banachverbands heißt *p-additiv*, falls

$$\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$$

für alle $x, y \in E$ mit $x \wedge y = 0$.

Satz 4.2. *Für jeden E Banachverband mit p-additiver Norm gibt es einen Maßraum (Ω, Σ, μ) derart, dass E isometrisch (verbands-)isomorph zu $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist.*

Beispiel 4.3. Es sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum. Dann gibt es einen Maßraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$ derart, dass $\mathscr{M}(\Omega, \Sigma) \cong L^1(\tilde{\Omega}, \tilde{\Sigma}, \tilde{\mu})$.