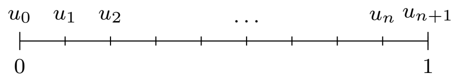
UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 04.11.2015

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 12+7*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 03

8. Consider a one-dimensional homogeneous material which is modelled as the interval $[0,1]$. We want to describe the time evolution of the temperature of the material by a discrete model, where we assume that the end points of $[0,1]$ are isolated, meaning that no heat can enter or escape the interval. To this end, consider $n+2$ equidistant points $0, \frac{1}{n+1}, ..., \frac{n}{n+1}, 1$ in $[0,1]$, and let $u_k(t)$ be the temperature at the point $\frac{k}{n+1}$ (for $k \in \{0, ..., n+1\}$) and at time $t \geq 0$.



Using the so-called *heat equation* from physics (which is actually a partial differential equation) one can derive the following (simplified) model for the heat flow:

$$(*) \qquad \dot{u}(t) = (n+1)^2 A u(t),$$

where $u(t) := (u_1(t), ..., u_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ and where $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is given by

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & -2 & & & \\ & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Let $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ be a solution of $(*)$. Prove the following assertions: (4)

(i) The quantity $v := u_1(t) + ... + u_n(t)$ does not depend on time [note: from a physical point of view this means that the total heat of the material is preserved].

(ii) If $u(0) \in \mathbb{R}^n_+$, then $u(t) \in \mathbb{R}^n_+$ for all $t \geq 0$.

(iii) If $u(0) \in \mathbb{R}^n_+$, then the solution u is bounded on the time interval $[0, \infty)$.

(iv) The solution u is bounded on the time interval $[0, \infty)$ even if $u(0) \notin \mathbb{R}^n_+$.

(b) Show that every eigenvalue of A is real, semi-simple and ≤ 0. (1)

(c) Show that 0 is an eigenvalue of A and compute the corresponding eigenspace. (1)

(d) Let $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ be a solution of $(*)$ with initial value $u(0) \in \mathbb{R}^n_+$. Prove that $u(t) \to \alpha e$ as $t \to \infty$, where $e = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ and $\alpha = \frac{1}{n}(u_1(0) + ... + u_n(0))$. (2)
Hint: Write the initial value as $u(0) = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, where $(v_1, ..., v_n)$ is a basis of $\mathbb{R}^n$ which consists of eigenvectors of A.

9. Eine Virusinfektion eines Organismus kann zum Beispiel durch folgende Differentialgleichung modelliert werden:

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{V} &= kI - \nu V \\ \dot{Z} &= \lambda - mZ - rVZ \\ \dot{I} &= rVZ - \mu I \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet V die Anzahl der freien Viren, Z die Anzahl der gesunden Zellen und I die Anzahl der infizierten Zellen. Die Zahlen $k, \nu, \lambda, m, r, \mu > 0$ sind Parameter.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Anfangsdaten $(V(0), Z(0), I(0)) = (V_0, Z_0, I_0) \in \mathbb{R}^3_+$ gilt: Die maximale Lösung der Differentialgleichung $(*)$ nimmt nur Werte in $\mathbb{R}^3_+$ an, ist für alle positiven Zeiten definiert und auf dem Zeitintervall $[0, \infty)$ beschränkt. (2)

Tipp: Wenden Sie Aufgabe 3 auf Blatt 1 zuerst auf $Z + I$ und dann auf V an.

Alternative: Wenden Sie Aufgabe 3 auf Blatt 1 auf $\varepsilon V + Z + I$ für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ an.

(b) Berechnen Sie, in Abhängigkeit von den Parametern, alle Equilibria von $(*)$, welche in der biologisch relevanten Menge $\mathbb{R}^3_+$ liegen. (2)

10. In dieser Aufgabe verwenden wir die folgenden Begriffe und Notationen: Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $A \geq 0$ (bzw. $x \geq 0$), falls alle Einträge von A (bzw. von x) größer oder gleich 0 sind. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *quasi-positiv*, falls die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ quasi-positiv ist.

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \, \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$ das *Spektrum* von A und die beiden Zahlen

$$r(A) := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\} \qquad \text{und} \qquad s(A) := \max\{\operatorname{Re}\lambda | \, \lambda \in \sigma(A)\}$$

heißen der *Spektralradius* und die *Spektralschranke* von A.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (5*)

(i) A ist quasi-positiv.

(ii) Alle nicht-diagonal-Einträge von A sind größer oder gleich 0.

(iii) Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $A + cI \geq 0$ (hierbei bezeichnet I die Einheitsmatrix).

(iv) Es gilt $A + cI \geq 0$ für alle genügend großen $c \geq 0$.

(v) A ist *kreuz-positiv*, d.h. für alle $0 \leq x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle y, x\rangle = 0$ gilt $\langle y, Ax\rangle \geq 0$.

(vi) $e^{tA} \geq 0$ für alle $t \geq 0$.

Tipp: Am einfachsten ist es, wenn Sie per Ringschluss zeigen, dass (i)–(v) äquivalent sind und dann beweisen, dass (vi) äquivalent zu (i)–(v) ist.

(b) Der *Satz von Perron-Frobenius* (genauer: eine Teilaussage dieses Satzes) besagt: „Gilt $A \geq 0$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $r(A) \in \sigma(A)$." Verwenden Sie diese Aussage um folgendes Resultat zu beweisen: (2*)

Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ quasi-positiv ist, dann ist $s(A)$ ein *dominanter Eigenwert* von A, d.h. es ist $s(A) \in \sigma(A)$ und für alle anderen Eigenwerte $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{s(A)\}$ gilt $\operatorname{Re}\lambda < s(A)$.

Tipp: Verwenden Sie Aussage (iv) aus Teilaufgabe (a).