Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 11.11.2015

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 10+3*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 04

11. Consider again the virus model (6)

$$(*)\quad \begin{cases} \dot V &= kI - \nu V \\ \dot Z &= \lambda - mZ - rVZ \\ \dot I &= rVZ - \mu I \end{cases}$$

from Exercise 9 on Sheet 3. We already know that the equilibria of the differential equation $(*)$ are given by

$$\begin{pmatrix}0, & \frac{\lambda}{m}, & 0\end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \begin{pmatrix}\frac{k\lambda}{\nu\mu} - \frac{m}{r}, & \frac{\mu\nu}{rk}, & \frac{\lambda}{\mu} - \frac{m\nu}{rk}\end{pmatrix},$$

where the second equilibrium is of biological relevance only if $\lambda \geq \frac{m\mu\nu}{rk}$.

Analyse the stability properties of both equilibria by employing the principle of linearised stability.

12. Betrachten Sie das folgende Differentialgleichungssystem: (4)

$$\begin{cases} \dot x &= \sigma(y-x) \\ \dot y &= rx - y - xz \\ \dot z &= xy - bz, \end{cases}$$

wobei $\sigma, b > 0$ und $r \in (0,1)$ gilt. Dabei handelt es sich um das sogenannte *Lorenz-System* aus der Metereologie. Offenbar ist $(0,0,0)$ ein Equilibrium des Systems.

Zeigen Sie mittels des Prinzips der linearisierten Stabilität, dass der Gleichgewichtspunkt $(0,0,0)$ asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Hierzu können Sie entweder die Eigenwerte der Funktionalmatrix per Hand ausrechnen, oder Sie können den unten zitierten Satz aus der Perron-Frobenius-Theorie *verwenden.*

Bei der *Perron-Frobenius-Theorie* handelt es sich um die Untersuchung von Spektraleigenschaften positiver und quasi-positiver Matrizen. Aus der Perron-Frobenius-Theorie stammt zum Beispiel der folgende Satz (für die verwendete Notation: siehe Aufgabe 10 auf Blatt 3):

Theorem. *Sei $A \in \mathbb{R}^n$ eine quasi-positive Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquvalent:*

(i) $s(A) < 0$.

(ii) A ist invertierbar und es gilt $-A^{-1} \geq 0$.

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \geq 0$ und $Ax \geq 0$ folgt $x = 0$.

13. Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine C^1-Funktion, die in einem Punkt $x_0 \in \Omega$ verschwindet. (3*)
In der Vorlesung haben Sie (ohne Beweis) erfahren:

Besitzt $f'(x_0)$ mindestens einen Eigenwert mit strikt positivem Realteil, so ist das Equilibrium x_0 der Differentialgleichung

$$(*)\quad \dot x = f(x)$$

instabil. Beweisen Sie, ohne obige Aussage zu verwenden, die folgende schwächere (und einfachere) Aussage:

Besitzen *alle* Eigenwerte von $f'(x_0)$ strikt positiven Realteil, dann ist das Equilibrium x_0 von $(*)$ instabil.

Hinweis: Betrachten Sie die Differentialgleichung $\dot x = -f(x)$ und zeigen Sie zuerst, dass die Lösungen dieser Differentialgleichung im Vergleich zu den Lösungen von $(*)$ rückwärts laufen.

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ws15/dynsys.html