Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 18.11.2015

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 10+4*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 05

14. Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{1-}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $V \in C(\Omega, \mathbb{R})$ eine strikte Ljapunov-Funktion für die Differentialgleichung (3)

$$(*) \quad \dot{x} = f(x).$$

Es sei $x_0 \in \Omega$ ein isoliertes Equilibrium von $(*)$ und in jeder Umgebung $O \subset \Omega$ von x_0 gebe es einen Punkt x mit $V(x) < V(x_0)$. Zeigen Sie, dass das Equilibrium $(*)$ instabil ist.

15. Ein punktförmiges Teilchen bewege sich in einer offenen, nicht-leeren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ in einem Lipschitz-stetigen Kraftfeld $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ und sei zudem einer Reibung ausgesetzt, die ein konstantes negatives Vielfaches seiner Geschwindigkeit ist. Wir nehmen zudem an, dass das Kraftfeld F *konservativ* ist, d.h. dass es eine C^1-Funktion $U : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $F(x) = -\nabla U(x)$ für alle $x \in \Omega$ gibt [*Anmerkung: Aus physikalischer Sicht ist $U(x)$ die potentielle Energie des Teilchens, wenn es sich am Ort x befindet*]. Wenn v die Geschwindigkeit des Teilches bezeichnet, dann erhalten wir aus den Axiomen der klassischen Mechanik die folgende Bewegungsgleichung:

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m} F(x) - \frac{\mu}{m} v, \end{cases}$$

wobei $m > 0$ die Masse die Teilchens bezeichnet und $\mu \geq 0$ den Reibungskoeffizienten.

Für den Rest der Aufgabe nehmen wir an, dass das Potential U nach unten beschränkt ist (d.h. es gibt es $c \in \mathbb{R}$ mit $U(x) \geq c$ für alle $x \in \Omega$) und dass Ω von einem unendlichen hohen Potentialwall umgeben ist, d.h. es gelte $U(x) \to \infty$ für $x \to \partial\Omega$.

(a) Zeigen Sie: Jede Lösung von $(*)$ mit Startzeitpunkt 0 existert für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie zudem: Ist Ω in $\mathbb{R}^3$ beschränkt oder gilt $U(x) \to \infty$ für $\|x\| \to \infty$, so ist jede Lösung von $(*)$ mit Startzeitpunkt 0 auf dem Zeitintervall $[0, \infty)$ beschränkt. (3)

Tipp: Betrachten Sie die Funktion $E(x, v) = \frac{1}{2} m \|v\|^2 + U(x)$, wobei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm bezeichnet.

(b) Sei $x_0 \in \Omega$ ein striktes lokales Minimum von U. Zeigen Sie, dass $(x_0, 0)$ ein stabiles Equilibrium von $(*)$ ist. Zeigen Sie zudem, dass dieses Equilibrium genau dann asymptotisch stabil ist, wenn $\mu > 0$ gilt und x_0 ein isolierter kritischer Punkt von U ist. (4)

(c) Benutzen Sie die Aussage von Aufgabe 14, um zu zeigen: Ist $\mu > 0$ und ist $x_0 \in \Omega$ ein isolierter kritischer Punkt von U, aber kein lokales Minimum von U, so ist $(x_0, 0)$ ein instabiles Equilibrium von $(*)$. (1*)

(d) Sei $\mu > 0$ und sei (x, v) eine Lösung von $(*)$ mit Startzeitpunkt 0. Zeigen Sie: (3*)

(i) $\int_0^\infty \|v(t)\|^2 \, dt < \infty$.

(ii) Falls $\int_0^\infty \|v(t)\| \, dt < \infty$ gilt, dann folgt: $x(t)$ ist für $t \to \infty$ konvergent und $v(t)$ konvergiert für $t \to \infty$ gegen 0.