Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 6+7*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 06

16. Wie in Aufgabe 15 sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nicht-leer und offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ Lipschitz-stetig und $U : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $\nabla U = -F$. Nach wie vor sei U nach unten beschränkt und es gelte $U(x) \to \infty$ für $x \to \partial\Omega$.

Wir betrachten erneut die Differentialgleichung

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}F(x) - \frac{\mu}{m}v, \end{cases}$$

welche die Bewegung eines punktförmigen Teilchens mit Masse $m > 0$ im Kraftfeld F beschreibt, wobei $\mu \geq 0$ der Reibungskoeffizient ist.

(a) Wir setzen nun zusätzlich voraus, dass $\mu > 0$ gilt und dass U höchstens endlich viele kritische Punkte hat. Zeigen Sie: Wenn Ω beschränkt ist, oder wenn Ω unbeschränkt ist und $\lim_{\|x\|\to\infty} U(x) = \infty$ gilt, dann konvergiert jede Lösung von $(*)$ für $t \to \infty$. (2)

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage aus Teilaufgabe (a) im Allgemeinen falsch ist, wenn Ω unbeschränkt ist und nicht $\lim_{\|x\|\to\infty} U(x) = \infty$ vorausgesetzt wurde. (3*)
Tipp: Wählen Sie ein U, welches keine kritischen Punkte hat.

17. Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch (4)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^3$ die ω-Limes-Menge der Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$.

18. Betrachten Sie die folgende Differentialgleichung, die ein Pendel mit Dämpfung beschreibt: (4*)

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 \sin x - \alpha y, \end{cases}$$

wobei $\omega > 0$ und $\alpha > 0$ Konstanten sind. Zeigen Sie, dass jede Lösung von $(*)$ global nach rechts beschränkt ist.