Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 09.12.2015

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 11+3*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 08

21. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer, sei $f \in C^{1-}_{\mathrm{loc}}(G, \mathbb{R}^n)$ und sei $D \subset G$ eine Menge, deren Abschluss in G enthalten ist. Zeigen Sie: Ist D positiv invariant für die Differentialgleichung (2)

$$(*) \quad \dot{u} = f(u),$$

so ist auch $\overline{D}$ positiv invariant für $(*)$.

22. Sei $f \in C^{1-}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und sei $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ eine C^∞-Kurve, d.h. $\gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, K(x) = 0\}$ für eine C^∞-Funktion $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla K(x) \neq 0$ für alle $x \in \gamma$.

(a) Das Vektorfeld f heißt *tangential an* γ falls $\langle \nabla K(x), f(x) \rangle = 0$ für alle $x \in \gamma$ gilt. Zeigen Sie: Die Kurve γ ist genau dann positiv invariant für $\dot{u} = f(u)$, wenn f tangential an γ ist. (3*)

(b) Sei nun konkret (2)

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} -y \exp(x^2 + y^2 - 1) \\ x \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und sei γ die Einheitskreislinie im $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass γ positiv invariant für $\dot{u} = f(u)$ ist.

23. Sei $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, sei $e_j \in \mathbb{R}^n$ für $j = 1, ..., n$ der j-te kanonische Einheitsvektor und sei $e = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren für $j = 1, ..., n$ die Funktionen $\phi_j, \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi_j(p) = \langle e_j, Fp \rangle \quad \text{and} \quad \phi(p) = \sum_{j=1}^n p_j \phi_j(p) = \langle p, Fp \rangle$$

und betrachten das Differentialgleichungssystem

$$(*) \qquad \dot{p}_j = p_j \big(\phi_j(p) - \phi(p)\big) \quad \text{für } j = 1, ..., n$$

im $\mathbb{R}^n$. Dies ist ein Modell aus der mathematischen Genetik, bei welchem die Zahlen $p_1, ..., p_n$ für Häufigkeiten bestimmter Allele in einer Population stehen. Die Zahl $\phi_j(p)$ kann hierbei als *Fitness* des j-ten Alleles interpretiert werden, die Zahl $\phi(p)$ steht für die *mittlere Fitness* der Population.

(a) Zeigen Sie, dass das Simplex $S_n := \{p \in \mathbb{R}^n_+ : p_1 + ... + p_n = 1\}$ positiv invariant für $(*)$ ist. (3)
Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass die rechte Seite von $(*)$ quasi-positiv ist. Leiten Sie dann eine Differentialgleichung für die Funktion $\langle e, p(t) \rangle$ her um zu zeigen, dass sie konstant 1 ist, falls sie zum Zeitpunkt 0 gleich 1 ist.

(b) Zeigen Sie: Jede Lösung von $(*)$, die zum Zeitpunkt 0 im Simplex S_n liegt, existiert für alle $t \geq 0$. (1)

(c) Sei $p : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $(*)$ mit Startwert $p(0) \in S_n$. Berechnen Sie die Ableitung von $\phi(p(t))$ und folgern Sie das *Fundamentaltheorem der natürlichen Selektion*: Ist p nicht konstant, so ist die mittlere Fitness $\phi(p(t))$ streng monoton wachsend. (3)