UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 16.12.2015

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 10+4*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 09

24. Betrachten Sie das folgende Räuber-Beute-Modell (wobei u die Beute und v der Räuber ist):

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{u} &= u - \lambda u^2 - v f(u), \\ \dot{v} &= -\mu v + v f(u). \end{cases}$$

Hierbei sind $\lambda, \mu > 0$ zwei Konstanten und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine C^1-Funktion mit $f(0) = 0$ und $f'(x) > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$.

(a) Für $\alpha > 0$ sei $D_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ die abgeschlossene Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(\alpha, 0)$ und $(0, \alpha)$. Zeigen Sie, dass D_α für alle genügend großen α positiv invariant für $(*)$ ist. (4)

(b) Folgern Sie, dass alle Lösungen von $(*)$ mit Anfangswerten in $[0, \infty)^2$ global nach rechts beschränkt sind. (1)

(c) Ein Equilibrium von $(*)$ heißt *Koexistenzgleichgewicht*, wenn es in $(0, \infty)^2$ liegt. Zeigen Sie: Ist $\mu < f(\frac{1}{\lambda})$, so besitzt $(*)$ genau ein Koexistenzgleichgewicht. (2*)

(d) Sei nun sogar $f(\frac{1}{2\lambda}) \leq \mu < f(\frac{1}{\lambda})$. Zeigen Sie, dass das eindeutig bestimmte Koexistenzgleichgewicht dann sogar asymptotisch stabil ist. (2*)
Tipp: Linearisierte Stabilität!

25. Wir betrachten die sogenannte *Fitzhugh-Nagumon-Gleichung* aus der Theorie der Nervensysteme. Diese lautet (5)

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x) - y, \\ \dot{y} = \sigma x - \gamma y \end{cases}$$

wobei $\sigma, \gamma > 0$ Konstanten sind und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = -x(x-a)(x-b)$ mit $0 < a < b$ gegeben ist.

Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein achsenparalleles Rechteck $R \subset \mathbb{R}^2$ gibt, welches positiv invariant für $(*)$ ist und den Punkt (x_0, y_0) enthält.

Tipp: Überlegen Sie sich, wie das Phasenportrait von $(*)$ aussieht und bestimmen Sie die Monotoniebereiche für x und y.