Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 07.01.2016
nach der Vorlesung

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 11*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 10

26. Das Christkind und der Weihnachtsmann haben gemeinsam Geschenke besorgt, die sie an Weihnachten verteilen wollen; doch nun werden Sie sich nicht einig, wer wieviele Geschenke ausliefern darf. Das Christkind hat im Moment $c \in (0,\infty)$ Geschenke auf seinem Stapel, der Weihnachtsmann besitzt $w \in (0,\infty)$ Geschenke. In sehr unweihnachtlicher Manier versucht der Weihnachtsmann nun soviele Geschenke wie möglich vom Stapel des Christkinds auf seinen eigenen zu räumen, und das Christkind macht genau das gleiche mit dem Geschenkestapel des Weihnachtsmannes. Wie schnell die beiden sind, hängt dabei von der momentanen Größe ihrer Geschenkestapel ab:

- Je mehr Geschenke der Weihnachtsmann auf seinem Stapel hat, desto leichter fällt es dem Christkind, viele Geschenke auf seinen eigenen Stapel umzuräumen. Zudem gilt: Je weniger Geschenke des Christkind auf seinem Stapel hat, desto panischer wird es, und desto schneller klaut es sich Geschenke vom Weihnachstmann.

  Die Umräumgeschwindigkeit des Christkinds sei also, sagen wir, proportional zum Quotienten $\frac{w}{c}$, die Proportionalitätskonstante bezeichnen wir mit $\alpha > 0$.
- Für den Weihnachtsmann gelten genau dieselben Regeln, d.h. seine Umräumgeschwindigkeit ist proportional zum Quotienten $\frac{c}{w}$, und die Proportionalitätskonstante bezeichnen wir mit $\beta > 0$.

Die zeitliche Entwicklung der Geschenkanzahlen $c, w > 0$ wird damit durch das Differentialgleichungssystem

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{c} &= \alpha \frac{w}{c} - \beta \frac{c}{w} \\ \dot{w} &= -\alpha \frac{w}{c} + \beta \frac{c}{w} \end{cases}$$

auf $(0,\infty)^2$ beschrieben.

(a) Bestimmen Sie alle Equilibria von $(*)$. (1*)

(b) Für jedes Equilibrium $e = (e_c, e_w)$ von $(*)$ sei $Q_e \subset (0,\infty)^2$ die Viertelebene, die durch $Q_e := e + [0,\infty)^2 = \{(c,w) \in (0,\infty)^2 \,|\, c \geq e_c,\ w \geq e_w\}$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass Q_e positiv invariant für $(*)$ ist. (3*)

(c) Zeigen Sie, dass $G : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $G(c,w) = c + w$ ein erstes Integral von $(*)$ ist und zeigen Sie, dass $V : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $V(c,w) = \frac{\beta}{w} + \frac{\alpha}{c}$ eine strikte Ljapunov-Funktion von $(*)$ ist. (3*)

(d) Zeigen Sie, dass jede Lösung von $(*)$ mit Startzeitpunkt 0 für alle $t \geq 0$ existiert. (1*)

(e) Zeigen Sie, dass jede Lösung von $(*)$ für $t \to \infty$ gegen ein Equilibrium konvergiert, obwohl die Menge der Equilibria nicht diskret ist. (3*)

(f) Laut Teilaufgabe (e) „löst“ sich der Streit zwischen Christkind und Weihnachtsmann also langfristig von selbst. Begründen Sie, warum diese Lösung nicht sehr harmonisch ist, indem Sie die Abhängigkeit der Equilibria von den Parametern α und β interpretieren. (0*)

In diesem Sinne wünschen wir Ihnen erholsame und besinnliche Weihnachtsferien!