Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 03.02.2016

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 9+2*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 14

33. Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^2$ offen, sei $f \in C^1(G;\mathbb{R}^2)$ und sei $\hat{u} \in G$ ein Equilibrium von $\dot{u} = f(u)$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind: (3)

(i) $\hat{u}$ ist ein Sattelpunkt.

(ii) $\det f'(\hat{u}) < 0$.

34. Sei $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, sei $F := -U'$ und sei $\mu : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine C^1-Funktion. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= F(x) - \mu(x)v, \end{cases}$$

die eine eindimensionale Bewegung eines Teilchens (mit Masse 1) in einem Kraftfeld F mit Reibung μ beschreibt. Sei $(\hat{x},\hat{v})$ ein Equilibrium von $(*)$.

(a) Zeigen Sie: $(\hat{x},\hat{v})$ ist genau dann ein Sattelpunkt von $(*)$, wenn $U''(\hat{x}) < 0$ gilt. (1)
Tipp: Überlegen Sie sich, welchen Wert $\hat{v}$ haben muss und verwenden Sie Aufgabe 33.

(b) Es bezeichne $f(x,v)$ die rechte Seite von $(*)$. Zeigen Sie: Es gilt genau dann $s(f'(\hat{x},\hat{v})) < 0$, wenn $U''(\hat{x}) > 0$ und $\mu(\hat{x}) > 0$ gilt. (2*)

(c) Zeigen Sie: Wenn $\mu \equiv 0$ gilt und $(\hat{x},\hat{v})$ ein Sattelpunkt ist, dann gilt (2)

$$\mathcal{M}_\mathrm{s} \cup \mathcal{M}_\mathrm{i} \subset \{(x,v) \in \mathbb{R}^2 |\, \frac{1}{2}v^2 = U(\hat{x}) - U(x)\};$$

hierbei bezeichnen $\mathcal{M}_\mathrm{s}$ und $\mathcal{M}_\mathrm{i}$ die stabile und die instabile Mannigfaltigkeit von $(\hat{x},\hat{v})$, vgl. Satz 6.1.

(d) Sei nun $\mu \equiv 0$ und $U(x) = \cos^2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(\hat{x},\hat{v}) := (0,0)$ ein Equilibrium und ein Sattelpunkt ist und skizzieren Sie die Mengen $\mathcal{M}_\mathrm{s}$ und $\mathcal{M}_\mathrm{i}$ für dieses Equilibrium. (3)