Universität Ulm

Abgabe: Montag, 13.05.2013

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Lösungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 3

6. Sei $p > 0$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir betrachten das Quadratische Funktional

$$I(x) = \int_0^b p\dot{x}(t)^2 + qx(t)^2 \,\mathrm{d}t \qquad (\, x \in C_1^s[0,b]\,),$$

wobei $b > 0$ eine nicht näher spezifizierte rechte Intervallgrenze ist.

(a) Berechnen Sie die Hauptlösung des zugehörigen Hamilton-Systems $\dot{u} = \frac{1}{p}v$, $\dot{v} = qu$.
Bemerkung: Sie können die Hauptlösung entweder direkt berechnen, indem Sie das Hamilton-System als lineare Differentialgleichung in zwei Dimensionen auffassen, oder Sie berechnen die Hauptlösung, indem Sie die Eulersche Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{x}) = qx$ mit passenden Startwerten lösen (vgl. Lemma 2 in Kapitel 15).

Lösung: Wir führen beide Lösungsmöglichkeiten vor:

Die erste Lösungsmöglichkeit besteht nach Lemma 2 in Abschnitt 15 darin, die Eulersche Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{x}) = qx$ zu lösen, wobei zwischen u, v und x der Zusammenhang $u = x$ und $v = p\dot{x}$ besteht. Um eine Hauptlösung zu erhalten, muss $u(0) = 0$ und $v(0) = 1$ gelten, also müssen wir die Anfangwerte $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = \frac{1}{p}$ wählen.
Man sieht sofort, dass die Lösung der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{x}) = qx$ im Fall $q > 0$ durch eine Linearkombination $x(t) = c_1 \exp(t\sqrt{\frac{q}{p}}) + c_2 \exp(-t\sqrt{\frac{q}{p}})$ gegeben ist und bestimmt die Koeffizienten mit Hilfe der Anfangsbedinungen zu $c_1 = -c_2 = \frac{1}{2\sqrt{pq}}$.
Im Falle $q < 0$ gilt $x(t) = c_1 \sin(t\sqrt{\frac{-q}{p}}) + c_2 \cos(t\sqrt{\frac{-q}{p}})$ und aus den Anfangsbedingungen erhalten wir $c_2 = 0$ und $c_1 = \frac{1}{\sqrt{-qp}}$.
Insgesamt haben wir als Hauptlösung:

- Im Falle $q > 0$ ist $(u(t), v(t)) = (x(t), p\dot{x}(t)) = (\,\frac{1}{\sqrt{pq}} \sinh(t\sqrt{\frac{q}{p}}),\, \cosh(t\sqrt{\frac{q}{p}})\,)$.
- Im Fall $q < 0$ ist $(u(t), v(t)) = (x(t), p\dot{x}(t)) = (\,\frac{1}{\sqrt{-qp}} \sin(t\sqrt{\frac{-q}{p}}),\, \cos(t\sqrt{\frac{-q}{p}})\,)$.

Die zweite (in diesem Beispiel aufwendigere) Lösungsmöglichkeit besteht darin, das Hamiltonsche System $\dot{u} = \frac{1}{p}v$, $\dot{v} = qu$ mit den Anfangwerten $u(0) = 0$ und $v(0) = 1$ direkt zu lösen. Dazu definieren wir

$$y := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad y_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ q & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Hamiltonsche System zusammen mit den Anfangswertbedingungen $u(0) = 0$ und $v(0) = 1$ ist somit durch das Anfangswertproblem $\dot{y} = Ay$, $y(0) = y_0$ gegeben, und die Lösung dieses Anfangwertproblems lautet $y(t) = \exp(tA)y_0$. Wir müssen also noch die Matrixexponentialfunktion zur Matrix A berechnen.
Die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A sind die Nullstellen des charakterisitischen Polynoms $\lambda^2 - \frac{q}{p}$ und die zugehörigen Eigenvektoren z_1, z_2 sind offenbar durch

$$z_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wegen $\lambda^2 - \frac{p}{q} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ muss $\lambda_1 = -\lambda_2$ gelten. Ist $T = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und D die Diagonalmatrix mit den beiden Einträgen λ_1 und λ_2, so gilt $A = TDT^{-1}$. Damit berechnet man leicht, dass

$$y(t) = \exp(tA)y_0 = T\exp(tD)T^{-1}y_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2p\lambda_1}(e^{t\lambda_1} - e^{-t\lambda_1}) \\ \frac{1}{2}(e^{t\lambda_1} + e^{-t\lambda_1}) \end{pmatrix}.$$

Um λ_1 explizit anzugeben, unterscheiden wir zwei Fälle: Im ersten Fall ist $q > 0$. Damit ist $\lambda_1 = (\frac{q}{p})^{\frac{1}{2}}$. Im zweiten Fall ist $q < 0$. Damit ist $\lambda_1 = i(\frac{-q}{p})^{\frac{1}{2}}$. Damit haben wir insgesamt die Hauptlösung

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = y(t) \ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{qp}} \sinh(t\sqrt{\frac{q}{p}}) \\ \cosh(t\sqrt{\frac{q}{p}}) \end{pmatrix}, \quad \text{falls } q > 0 \quad \text{und}$$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = y(t) \ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{-qp}} \sin(t\sqrt{\frac{-q}{p}}) \\ \cos(t\sqrt{\frac{-q}{p}}) \end{pmatrix}, \quad \text{falls } q < 0 \text{ ist.}$$

Also haben wir sowohl für $q > 0$ als auch für $q < 0$ die Hauptlösung gefunden.

(b) Entscheiden Sie in Abhängigkeit von p, q und b, wann das quadratische Funktional I positiv semidefinit (bzw. positiv definit) ist.

Lösung: Wir können Satz 21' anwenden:

- Im Falle $q > 0$ hat das zur Hauptlösung $(u(t), v(t))$ gehörende $u(t)$ bis auf 0 offenbar keine weiteren Nullstellen im Intervall $[0, b]$ (unabhängig davon, wie b gewählt wurde). Also ist das Funktional I stets positiv definit (und somit insbesondere positiv semidefinit).
- Im Falle $q < 0$ hat das zur Hauptlösung $(u(t), v(t))$ gehörende $u(t)$ seine nächste Nullstelle rechts der 0 bei der Stelle $\pi\sqrt{\frac{p}{-q}}$. Also ist das Funktional I genau dann positiv semidefinit, wenn $b \geq \pi\sqrt{\frac{p}{-q}}$ gilt und genau dann positiv definit, wenn $b > \pi\sqrt{\frac{p}{-q}}$ gilt.