Universität Ulm

Abgabe: Montag, 27.05.2013

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Lösungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 4

7. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $a, b \in I$ mit $a < b$ und seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen und $p(t) > 0$ für alle $t \in I$. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{x}) = qx$$

und zeigen Sie: Wenn $(*)$ eine Lösung x_1 besitzt, die die Eigenschaft $x_1(t) > 0$ für alle $t \in (a, b]$ erfüllt, dann besitzt $(*)$ auch eine Lösung x_2, die die Eigenschaft $x_2(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ erfüllt.

Tipp: Sei x_0 eine Lösung von $(*)$ mit der Eigenschaft $x_0(a) > 0$; betrachten Sie nun $x_1(t) + \varepsilon x_0(t)$ für genügend kleine $\varepsilon > 0$.

Lösung: Sei x_1 eine Lösung von $(*)$ mit $x_1(t) > 0$ für alle $t \in (a, b]$ und sei x_0 eine Lösung von $(*)$ mit $x_0(t) = 1$ (eine solche Lösung existiert auf ganz I, weil $(*)$ eine lineare Differentialgleichung ist). Weil x_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $x_0(t) > 0$ für alle $t \in [a, a + \delta)$ ist.

Andererseits gilt $x_1(t) > 0$ für alle $t \in [a + \delta, b]$ und weil $[a + \delta, b]$ kompakt ist, gibt es ein $c > 0$, so dass $x_1(t) \geq c$ für alle $t \in [a + \delta, b]$ gilt.

Wegen der Stetigkeit von x_0 ist $d := \max\{|x_0(t)| : t \in [a+\delta, b]\} < \infty$. Wir setzen nun $x_2 = x_1 + \frac{c}{d+1} x_0$. Dann ist x_2 eine Lösung von $(*)$ und es gilt:

- Für $t = a$ ist $x_2(t) = x_1(a) + \frac{c}{d+1} x_0(a) > 0$ wegen $c > 0$ und $x_0(a) > 0$.
- Für $t \in (a, a + \delta)$ ist $x_0(t) > 0$ und somit $x_2(t) = x_1(t) + \frac{c}{d+1} x_0(t) > x_1(t) > 0$.
- Für $t \in [a+\delta, b]$ ist $x_0(t) \geq -d$ und $x_1(t) \geq c$. Somit gilt $x_2(t) = x_1(t) + \frac{c}{d+1} x_0(t) \geq c - \frac{c}{d+1} d > c - c = 0$.

Also haben wir $x_2(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ gezeigt.