Übungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 2

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetig und $p(t) > 0$ für alle $t \in I$. Betrachten Sie für $t_0 \in I$ die beiden Anfangwertprobleme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{x}) = qx, \qquad x(t_0) = x_0 \neq 0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \tag{1}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{\omega^2}{p} + q, \qquad \omega(t_0) = \omega_0 := \frac{p(t_0)v_0}{x_0}. \tag{2}$$

Wir wollen den Zusammenhang zwischen den Nullstellen der Lösung von (1) und dem Verhalten der Lösung von (2) untersuchen.

(a) Sei $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1) und $J \subset I$ eine offenes Intervall, das t_0 enthält, und auf dem x keine Nullstellen hat. Zeigen Sie: Dann ist $\omega := \frac{p\dot{x}}{x}$ auf J eine Lösung von (2).

(b) Sei ω eine Lösung von (2) auf einem offenen Intervall $J \subset I$, welches t_0 enthält. Sei weiterhin $x : J \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \frac{\omega}{p}x, \qquad x(t_0) = x_0.$$

Zeigen Sie, dass x auf J keine Nullstellen besitzt und dass x auf J eine Lösung von (1) ist.

(c) Wie in Teilaufgabe (a) sei $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1) und $J \subset I$ ein offenes Intervall, das t_0 enthält, und auf dem x keine Nullstellen hat.

Außerdem sei nun $r \in I$ ein Randpunkt von J, so dass $x(r) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{\substack{t \to r \\ t \in J}} |r - t|^{1+\varepsilon}\omega(t) = 0$$

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass es keine Folge $(t_n) \subset J$ mit $t_n \to r$ und $\limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{|x(t_n)|}{|r-t_n|^{1+\varepsilon}} < \infty$ geben kann, weil ansonsten $\dot{x}(r) = 0$ gelten müsste.

5. Wir betrachten diesselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 4, nun aber im Spezialfall $I = \mathbb{R}$, $t_0 = 0$ und $v_0 = 0$. Zudem nehmen seien $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $p > 0$ konstant (d.h. die Anfangswertprobleme (1) und (2) sind autonom).

(a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (1). Welche unterschiedlichen Fälle ergeben sich in Abhängigkeit des Vorzeichens von $\frac{q}{p}$? Diskutieren Sie die Nullstellen der Lösung!

(b) Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (2) durch Trennung der Variablen! Achten Sie beim Lösen wieder auf das Vorzeichen von $\frac{q}{p}$!

(c) Leiten Sie die Lösung von (2) nocheinmal her, aber diesmal aus der Lösung des Anfangswertproblems (1) mit Hilfe der Formel aus Aufgabe 4 (i).