Universität Ulm

Abgabe: Montag, 03.06.2013

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Übungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 5

8. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$(*) \qquad I(x) = \int_0^1 (1 - \dot{x}(t))^2 \,\mathrm{d}t, \quad x(0) = 1, x(1) = 0.$$

(a) Berechnen Sie die Lösung $\overline{x}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung für $(*)$.

(b) Gegeben Sie die Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ für die zu $\overline{x}(t)$ gehörige Jacobi-Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{\eta}) = q\eta$ an.
Berechnen Sie die Lösung der Jacobi-Differenzialgleichung explizit.

(c) Berechnen Sie die Lösung der Jacobi-Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{\eta}) = q\eta$ noch einmal, aber diesmal mit Hilfe von Satz 23'!

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Jacobi-Legendre, dass die Lösung $\overline{x}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung ein schwaches lokales Minimum des Variationsproblems $(*)$ ist.
Wie hätte man dies mit Hilfe eines Konvexitäts-Arguments auch ohne den Satz von Jacobi-Legendre sehen können?

9. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$(*) \qquad I(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}\dot{x}(t)^3 - \dot{x}(t)^2 \,\mathrm{d}t, \quad x(0) = 0, x(1) = 2.$$

(a) Berechnen Sie die Lösung $\overline{x}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung für $(*)$.

(b) Zeigen Sie, dass $p(t) = f_{\dot{x}\dot{x}}(t, \overline{x}(t), \dot{\overline{x}}(t))$ positiv ist (wobei $f(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{3}\dot{x}^3 - \dot{x}^2$ ist).
Berechnen Sie die Hauptlösung der Jacobi-Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{\eta}) = q\eta$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Jacobi-Legendre, dass die Lösung $\overline{x}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung ein schwaches lokales Minimum des Variationsproblems $(*)$ ist.
Könnte man hier ebenfalls ein Konvexitäts-Argument anstelle des Satzes von Jacobi-Legendre verwenden?