Universität Ulm

Abgabe: Wochentag, 10.06.2013

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Übungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 6

10. Sei $f(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in (-1,1)$ und $\dot{x} \in \mathbb{R}$.
Wir betrachten das Funktional

$$I(x) = \int_0^1 f(t,x,\dot{x})\,\mathrm{d}t.$$

(a) Leiten Sie die Beltramische partielle Differentialgleichung her!

(b) Zeigen Sie: Für jedes $c \geq 0$ ist

$$\Phi(t,x) = \sqrt{\frac{2}{2-x} + \frac{2}{2+x} + c}$$

eine Lösung der Beltramischen partiellen Differentialgleichung.

(c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $c = 0$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \Phi(t,x(t))$ implizit durch

$$(*) \quad \arcsin\Big(\frac{x(t)}{2}\Big) + \frac{x(t)}{2}\sqrt{1-\Big(\frac{x(t)}{2}\Big)^2} - d = \sqrt{2}t$$

gegeben sind (mit der Konstanten $d = \arcsin(\frac{x(0)}{2}) + \frac{x(0)}{2}\sqrt{1-(\frac{x(0)}{2})^2}$).