Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Übungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 7

11. Sei $f(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{x}$ für $t \in (0, \infty)$, $x \in (0, \infty)$ und $\dot{x} \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Funktional

$$I(x) = \int_1^2 f(t, x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t.$$

(a) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Differentialgleichung für das Funktional $I(x)$ her und zeigen Sie, dass $x(t) = (\frac{3}{\sqrt{2}}t + c)^{\frac{2}{3}}$ für $c \in (0, \infty)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Differentialgleichung ist.

(b) Verwenden Sie das Lemma aus Kapitel 18 um mit Hilfe von Teilaufgabe (a) ein geodätisches Feld Φ für $I(x)$ herzuleiten.

(c) Leiten Sie Beltrami-Differentialgleichung für $I(x)$ her und rechnen Sie explizit nach, dass das Feld Φ aus Teilaufgabe (b) tatsächlich die Beltrami-Differentialgleichung löst.

(d) Rechnen Sie außerdem explizit nach, dass die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung aus Teilaufgabe (a) tatsächlich die Differentialgleichung $\dot{x} = \Phi(t, x)$ erfüllt.