Universität Ulm

Abgabe: Montag, 24.06.2013

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Übungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 8

12. Betrachten Sie das folgende Variationsproblem:

$$I(x) = \int_0^1 \dot{x}(t)^2 - x(t)^2 - 2tx(t)\ \mathrm{d}t = \min\,, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Sei $\varphi_1(t) = t(1-t)$, $\varphi_2(t) = t^2(1-t)$ und sei $\Phi_2 := \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ die lineare Hülle von φ_1 und φ_2.

(a) Minimieren Sie das Funktional I über dem Raum Φ_2, d.h. finden Sie diejenigen Koeffizienten $\overline{c}_1, \overline{c}_2 \in \mathbb{R}$, für die $I(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)$ minimal ist.

(b) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional I und berechnen Sie die Lösung $\overline{x}$ der Euler-Lagrange-Gleichung für die angegebenen Randbedingungen.

(c) Vergleichen Sie die exakte Lösung $\overline{x}$, die Sie in Teilaufgabe (b) berechnet haben, mit der Näherungslösung $\overline{c}_1\varphi_1 + \overline{c}_2\varphi_2$, die Sie in Teilaufgabe (a) berechnet haben (beispielsweise, indem Sie die beiden Funktionen am Computer plotten).