Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 12

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 3

6. Sei E ein normierter Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir setzen $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E; E)$. Für jeden Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $T^n := T \cdots T$ (wobei die Hintereinanderausführung aus n Faktoren besteht); zudem setzen wir $T^0 := \mathrm{id}_E$, wobei $\mathrm{id}_E \in \mathcal{L}(E)$ die *Identität* auf E bezeichnet, d.h. es gilt $\mathrm{id}_E f = f$ für alle $f \in E$.

Ein Operator $T \in \mathcal{L}(E)$ heißt *invertierbar*, wenn T bijektiv ist und wenn die Umkehrabbildung T^{-1} ebenfalls stetig ist.

(a) Sei $T \in \mathcal{L}(E)$. Zeigen Sie: T ist genau dann invertierbar, wenn es einen Operator $S \in \mathcal{L}(E)$ mit $ST = TS = \mathrm{id}_E$ gibt; in diesem Fall ist $S = T^{-1}$. (1)

(b) Es erfülle $T \in \mathcal{L}(E)$ die Bedingung $\|T^n\| \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass es dann Konstanten $C > 0$ und $\rho \in [0, 1)$ derart gibt, dass $\|T^n\| \le C\rho^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (2)

(c) Sei E vollständig und es erfülle $T \in \mathcal{L}(E)$ die Eigenschaft $\|T^n\| \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie: Dann ist der Operator $\mathrm{id}_E - T \in \mathcal{L}(E)$ invertierbar. (2)
Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ im Banachraum $\mathcal{L}(E)$ konvergiert.

7. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{K})$ mit der Supremumsnorm ausgestattet. Seien $\alpha, \beta \in E$ fest vorgegebene Funktionen. Zudem sei $T : E \to E$ durch $(Tf)(t) = \alpha(t) \int_0^t \beta(s) f(s)\, ds$ für alle $f \in E$ und alle $t \in [0, 1]$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: Für alle $f \in E$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt $|(T^n f)(t)| \le \frac{t^n \|\alpha\|_\infty^n \|\beta\|_\infty^n}{n!} \|f\|_\infty$. (2)
Folgern Sie sodann: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\|T^n\| \le \frac{\|\alpha\|_\infty^n \|\beta\|_\infty^n}{n!}$.

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie – zum Beispiel mit Hilfe von Aufgabe 6(c) – dass der Operator $\lambda \,\mathrm{id}_E - T \in \mathcal{L}(E)$ invertierbar ist. Folgern Sie anschließend: Für jedes $g \in E$ besitzt die Integralgleichung (3)

$$\lambda f(t) = \alpha(t) \int_0^t \beta(s) f(s)\, ds + g(t) \qquad \text{für alle } t \in [0, 1] \qquad (*)$$

genau eine Lösung $f \in E$; zudem hängt die Lösung f bezüglich der Supremumsnorm stetig von g ab.

8. Sei $\ell^1 := \ell^1(\mathbb{N}_0; \mathbb{C})$ und sei $T : \ell^1 \to \ell^1$ durch $(Tf)_n = f_{n+2} - f_{n+1} - f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $f = (f_n) \in \ell^1$ gegeben. (2)

Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(\ell^1)$ gilt und berechnen Sie die Operatornorm von T.