Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 24.04.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 20+8*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 1

6. Sei $l^2 = l^2(\mathbb{N})$. Für jedes $t \geq 0$ und jedes $x = (x_n) \in l^2$ sei $T(t)x = (e^{-nt}x_n) \in l^2$. Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf l^2 ist. (5)

Tipp für die starke Stetigkeit: Zeigen Sie, dass $||T(t)||$ auf einer Umgebung von $t = 0$ beschränkt ist und zeigen Sie $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ für alle $x \in c_{00} := \{(x_n) \subset \mathbb{C} :\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ x_n = 0\ \forall n > n_0\}$. Dann folgt die Behauptung aus einem Satz in der Vorlesung.

Lösung: Für jedes $t \geq 0$ ist $T(t)$ offenbar linear. Weil die Folge (e^{-nt}) in $\mathbb{C}$ beschränkt ist, bildet $T(t)$ tatsächlich wieder nach l^2 ab und nach Aufgabe 5 ist $T(t)$ beschränkt. Genauer gilt $||T(t)x|| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \exp(-tn)\, ||x|| \leq ||x||$ für jedes $x \in l^2$. Damit ist sogar $||T(t)|| \leq 1$ (man sagt, $T(t)$ ist eine Kontraktion).

Außerdem gilt für $x = (x_n) \in l^2$, dass $T(0)x = (e^{-n\cdot 0}x_n) = (x_n) = x$, also ist $T(0) = I$. Für $s, t \geq 0$ beliebig und $x = (x_n) \in l^2$ gilt

$$\begin{aligned} T(t+s)x &= (\exp(-(t+s)n)x_n) = (\exp(-tn)\exp(-sn)x_n) = \\ &= T(t)(\exp(-sn)x_n) = T(t)T(s)(x_n) = T(t)T(s)x. \end{aligned}$$

Um die starke Stetigkeit zu zeigen, sei zunächst $x \in c_{00}$ und es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n = 0$ für alle $n > n_0$. Dann ist

$$||x - T(t)x|| = (\sum_{k=1}^{n_0} (x_k - \exp(-kt)x_k))^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (t \to 0).$$

Also ist $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ für jedes $x \in c_{00}$. Weil c_{00} dicht in l^2 liegt und weil zugleich $||T(t)|| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ gilt, ist $(T(t))$ stark stetig.

7. Betrachten Sie den Funktionenraum

$$C_0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ stetig mit } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\}.$$

Zusammen mit der Supremumsnorm wird dieser Raum zu einem Banachraum.

Für jedes $t \geq 0$ und jedes $f \in C_0(\mathbb{R})$ sei $T(t)f = f(t + \cdot) \in C_0(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R})$ ist (die sogenannte Links-Translations-Halbgruppe). (4)

Tipp für die starke Stetigkeit: Zeigen Sie zunächst, dass alle Funktionen $f \in C_0(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig sind.

Lösung: Offenbar ist jedes $T(t)$ eine lineare Isometrie (also insbesondere $T(t) \in \mathcal{L}(C_0(\mathbb{R}))$) und $T(0) = I$. Für $f \in C_0(\mathbb{R})$ und $t, s \geq 0$ gilt außerdem

$$T(t+s)f(\cdot) = f(s + t + \cdot) = T(t)f(s + \cdot) = T(t)T(s)f(\cdot).$$

Wir müssen noch die starke Stetigkeit nachweisen. Dazu zeigen wir zunächst, dass jede Funktion $f \in C_0(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig ist:

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$, sodass $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in K^C$ (beispielsweise $K = [-N, N]$ für genügend großes N). Nun ist die Einschränkung von f auf K gleichmäßig stetig, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$, falls $x, y \in K$ mit $|x - y| < \delta$.

Seien jetzt $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$. Wir unterscheiden drei Fälle:

- Im ersten Fall ist $x, y \in K$, also gilt $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
- Im zweiten Fall ist $x, y \in K^C$ und es folgt $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \varepsilon$.

- Im dritten Fall schließlich ist $x \in K$, $y \in K^C$. Dann gibt es ein $z \in \partial K$ mit $|z - x| < \delta$. Damit ist $|f(x) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Wir können also

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z)| + |f(y)| < \varepsilon.$$

folgern.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass jedes $f \in C_0(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig ist. Sei jetzt $t_0 \geq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt. Ist nun $t \geq 0$ mit $|t - t_0| < \delta$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so folgt aus $|(x + t) - (x - t_0)| < \delta$, dass

$$|f(x + t) - f(x + t_0)| < \varepsilon.$$

Somit ist $||T(t)f - T(t_0)f|| \leq \varepsilon$ für $|t - t_0| < \delta$. Wir haben $\lim_{t \to t_0} T(t)f = T(t_0)f$ gezeigt.

(b) Zeigen Sie, dass $T(t)$ für $t \to 0$ nicht in Operatornorm gegen I konvergiert. (2)

Lösung: Man betrachte die Nullfolge $(t_n) = (\frac{1}{n})$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in C_0(\mathbb{R})$ eine Funktion, die nur auf dem Intervall $[1, 1 + \frac{1}{2n}]$ lebt und die die Supremumsnorm $||f_n|| = 1$ besitzt. Dann haben f_n und $T(t_n)f_n$ disjunkten Träger und folglich gilt $||T(t_n)f_n - If_n|| = ||T(t_n)f_n - f_n|| = 1$. Damit haben wir $||T(t_n) - I|| \geq 1$ für alle t_n gezeigt. Insbesondere kann nicht $||T(t_n)I|| \to 0$ für $n \to \infty$ gelten.

8. Sei X ein Banachraum und seien $A : D(A) \to X$, $B : D(B) \to X$ lineare Operatoren auf X. Zeigen Sie:

(a) Ist $\rho(A) \neq \emptyset$, so ist A abgeschlossen. (2)

Lösung: Sei $\mu \in \rho(A)$. Dann ist $\mathrm{R}(\mu, A) = (\mu - A)^{-1}$ stetig. Es sei $S : X^2 \to X^2$ mit $S(x, y) = (y, x)$. Wie in Aufgabe 2 gilt

$$G((\mu - A)^{-1}) = S(G(\mu - A)) \quad \text{und somit} \quad S(G((\mu - A)^{-1})) = G(\mu - A).$$

Weil $(\mu - A)^{-1}$ stetig und S isometrisch ist, ist $G(\mu - A)$ abgeschlossen. Damit ist $\mu - A$ und folglich auch A abgeschlossen.

(b) Ist $A \subset B$ und $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$, so gilt $A = B$. (2)

Lösung: Es genügt $D(A) = D(B)$ zu zeigen. Sei $\mu \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Damit ist $D(\mu - A) \subset D(\mu - B)$. Angenommen, es gäbe ein $x \in D(B) \setminus D(A)$. Wegen der Surjektivität von $\mu - A$ gäbe es dann auch ein $y \in D(A)$ mit $(\mu - A)y = (\mu - B)x$. Die Injektivität von $\mu - B$ impliziert dann aber wegen $y \in D(B)$, dass $x = y$. Dies widerspricht $x \notin D(A)$.

9. Sei $X = L^1(\mathbb{R})$ der Raum aller komplexwertigen, Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ (modulo f.ü.-Gleicheit). Für $f, g \in X$ definieren wir das Faltungsprodukt $f \star g \in X$ durch

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem definieren wir für jedes $f \in X$ den Faltungsoperator $C_f : X \to X$, $g \mapsto f \star g$.

(a) Zeigen Sie: Für $f, g \in X$ ist tatsächlich auch $f \star g \in X$. Außerdem ist $M_f \in \mathcal{L}(X)$ mit Operatornorm $||C_f|| \leq ||f||_1$, wobei $||\cdot||_1$ die 1-Norm auf $X = L^1(\mathbb{R})$ bezeichnet. (2*)

Lösung: Für $f, g \in X$ berechnen wir zunächst:

$$\begin{aligned} \int\int |f(x - y)g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int\int |f(x - y)|\,\mathrm{d}x\,|g(y)|\,\mathrm{d}y = \\ &= \int\int |f(x)|\,\mathrm{d}x|g(y)|\,\mathrm{d}y = ||f||_1\,||g||_1 < \infty, \end{aligned}$$

wobei die erste Gleichheit aus dem Satz von Fubini-Tonelli folgt. Somit ist $\int |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y < \infty$ für fast alle x; der Wert $(f \star g)(x)$ existiert also für fast alle x. Weiterhin gilt nun

$$||f \star g||_1 = \int |(f \star g)(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int\int |f(x - y)g(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = ||f||_1\,||g||_1 < \infty.$$

Damit ist sowohl $f \star g \in X$ als auch $||C_f|| \leq ||f||_1$ gezeigt.

(b) Sei $(\delta_n) \subset X$ eine Folge von nicht negativen Funktionen mit $||\delta_n||_1 = 1$, sodass für jedes $\alpha > 0$ die Bedingung $\int_{|x|\geq\alpha} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x \ \to 0$ (für $n \to \infty$) erfüllt ist (eine solche Folge (δ_n) nennt man auch Dirac-Folge). (4*)

Zeigen Sie zunächst für jedes stetige $f \in X$ mit kompaktem Träger und anschließend für jedes $f \in X$, dass $f \star \delta_n \to f$ in X. Folgern Sie daraus: Für jedes $f \in X$ gilt sogar $||C_f|| = ||f||_1$.

Lösung: Sei $f \in X$ stetig mit kompaktem Träger und $[a, b]$ ein beschränktes Intervall, das den Träger von f komplett enthält. Nun sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es ein $\alpha \in (0, 1]$, so dass für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \alpha$ stets $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt. Nach Definition der Dirac-Folge gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\int_{|x|\geq\alpha} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Damit berechnen wir

$$||f \star \delta_n - f||_1 = \int \left| \int f(x-y)\delta_n(y)\ \mathrm{d}y \ - \ f(x) \right| \mathrm{d}x = \int \left| \int (f(x-y) - f(x))\delta_n(y)\ \mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x$$

$$\leq \int \int_{|y|\geq\alpha} |(f(x-y) - f(x))\delta_n(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int \int_{|y|<\alpha} |(f(x-y) - f(x))\delta_n(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{|y|\geq\alpha} \int |(f(x-y) - f(x))|\,\mathrm{d}x\ \delta_n(y)\,\mathrm{d}y + \int_{|y|<\alpha} \int |(f(x-y) - f(x))|\,\mathrm{d}x\ \delta_n(y)\,\mathrm{d}y$$

Das vordere Integral können wir nach oben durch die Zahl

$$2\,||f||_1 \int_{|y|\geq\alpha} \delta_n(y)\,\mathrm{d}y \ \leq \ 2\,||f||_1\,\varepsilon$$

abschätzen.

Weil für $|y| < \alpha$ die Funktion $|f(\cdot - y) - f(\cdot)|$ nur auf dem Intervall $[a - \alpha, b + \alpha]$ lebt und durch ε beschränkt ist, können wir auch das hintere Integral nach oben abschätzen, nämlich durch die Zahl

$$(b - a + 2\alpha)\cdot\varepsilon\cdot\int_{|y|\leq\alpha} \delta_n(y)\,\mathrm{d}y \ \leq \ (b - a + 2)\,\varepsilon.$$

Insgesamt gilt also $||f \star \delta_n - f||_1 \leq \varepsilon\cdot(2||f||_1 + b - a + 2)$ für alle $n \geq n_0$. Wir haben $f \star \delta_n \to f$ in X gezeigt.

Seit jetzt $f \in X$ beliebig und sei $\varepsilon > 0$. Weil die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in X liegen, finden wir ein stetiges $g \in X$ mit $||f - g||_1 < \varepsilon$. Außerdem gilt für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ ab einem geeignetem n_0, dass $||g - g \star \delta_n||_1 < \varepsilon$. Wir schließen, dass für $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$||f - f \star \delta_n||_1 \leq ||f - g||_1 + ||g - g \star \delta_n||_1 + ||g \star \delta_n - f \star \delta_n||_1 < 3\varepsilon$$

gilt. Also ist $f \star \delta_n \to f$ in X für alle $f \in X$ gezeigt.

Nun folgt auch leicht die Abschätzung $||C_f|| \geq ||f||_1$ für alle $f \in X$: Sei nämlich (δ_n) eine beliebige Dirac-Folge (offenbar existiert eine solche; man wähle beispielsweise $\delta_n = n\cdot 1_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}$). Dann folgt

$$||C_f|| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||f \star \delta_n||_1 \geq ||f||_1.$$

Zusammen mit (a) haben wir $||C_f|| = ||f||_1$ gezeigt.

(c) Für jedes $t > 0$ sei die Funktion $k_t \in X$ durch $k_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$ gegeben. Wir setzen nun $T(0) = I$ und $T(t) = C_{k_t}$ für $t > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der vorangehenden Teilaufgaben, dass $(T(t))_{t\geq0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X ist und dass $||T(t)|| = 1$ für jedes $t \geq 0$ gilt. (5)

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Faltung assoziativ und kommutativ ist.

Lösung: Nach Teilaufgabe (a) ist $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ für jedes t und nach Konstruktion gilt $T(0) = I$. Als nächstes zeigen wir die starke Stetigkeit:

Sei $(t_n) \subset (0, \infty)$ eine Nullfolge. Dann bilden die Funktionen k_{t_n} eine Dirac-Folge: Es sind nämlich alle Funktionen k_{t_n} nicht-negativ, es gilt $||k_{t_n}||_1 = 1$ und für $\alpha > 0$ ist

$$\int_{|x|\geq\alpha} k_{t_n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\geq\frac{\alpha}{\sqrt{4t_n}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(x^2)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Weil die Faltung kommutativ ist, folgt nun aus (b), dass $\lim_{n\to\infty} T(t_n)f = f$ für alle $f \in X$. Damit ist die starke Stetigkeit von $(T(t))$ in $t = 0$ bewiesen und aus $||T(t)|| = ||k_t|| = 1$ für $t \geq 0$ folgt, dass $(T(t))$ in jedem $t \geq 0$ stark stetig ist.

Wir müssen noch das Halbgruppengesetz $T(s+t) = T(s)T(t)$ für $t, s \geq 0$ zeigen. Offenbar können wir hierbei $t, s > 0$ voraussetzen. Zuerst zeigen wir die Formel $k_{s+t} = k_s \star k_t$ für alle $s, t > 0$. Wir rechnen dies explizit nach:

$$\begin{aligned}
(k_s \star k_t)(x) &= \int k_s(x-y)k_t(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int \exp\Big(-\big(\frac{(x-y)^2}{4s} + \frac{y^2}{4t}\big)\Big)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{st}}\int \exp\Big(-\big(\frac{y^2(t+s)}{4st} - \frac{2xy}{4s} + \frac{x^2}{4s}\big)\Big)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{st}}\exp\Big(-\big(\frac{x^2}{4s} - \frac{x^2 t}{4s(s+t)}\big)\Big)\int \exp\Big(-\big(\frac{y\sqrt{t+s}}{\sqrt{4st}} - \frac{x\sqrt{t}}{\sqrt{4s(s+t)}}\big)^2\Big)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{4\pi\sqrt{st}}\exp\big(-\frac{x^2}{4(s+t)}\big)\frac{\sqrt{4st}}{\sqrt{t+s}}\int \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi(s+t)}}\exp\big(-\frac{x^2}{4(s+t)}\big) = k_{s+t}(x).
\end{aligned}$$

Für beliebiges $f \in X$ erhalten wir nun aufgrund der Assoziativität der Faltung, dass

$$T(s+t)f = k_{s+t} \star f = (k_s \star k_t) \star f = k_s \star (k_t \star f) = k_s \star (T(t)f) = T(s)T(t)f.$$

Das war noch zu zeigen.

10. Sei $X = \mathbb{C}^2$. Den Raum $\mathcal{L}(X)$ identifizieren wir mit dem Raum aller komplexen 2×2-Matrizen. (2*)
Finden Sie eine Abbildung $\mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$, die zwar die beiden Halbgruppengesetze

- $T(s+t) = T(s)T(t)$ für alle $s, t \geq 0$,
- $T(0) = I$

erfüllt, die aber nicht stark stetig ist.

Lösung: Man setze $T(0) = I$ und $T(t) = 0$ für alle $t > 0$. Dann sind die gewünschten Eigenschaften offenbar erfüllt.