Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 15.05.2012

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 18+8*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 3

19. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer und sei $\mathcal{D}(\Omega)$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen, deren Träger kompakt und komplett in Ω enthalten ist. Außerdem sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\Omega)$. Eine Funktion $D_j f \in L^p(\Omega)$ (für $j \in \{1, ..., n\}$) heißt **schwache Ableitung** von f nach der j-ten Komponente, falls für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Gleichheit

$$-\int_\Omega D_j f \; \varphi = \int_\Omega f \; \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

gilt. Die Funktion $D_j f$ ist, falls existent, eindeutig bestimmt (modulo fast-überall-Gleichheit).

(a) Sei $W^{1,p}$ die Menge aller Funktionen $f \in L^p(\Omega)$, die nach jeder Komponenten $j \in \{1, ..., n\}$ eine schwache Ableitung $D_j f \in L^p(\Omega)$ besitzen (modulo f.ü.-Gleichheit). Zeigen Sie, dass $||f||_{W^{1,p}} = (||f||_p^p + \sum_{k=1}^n ||D_j f||_p^p)^{\frac{1}{p}}$ eine vollständige Norm auf $W^{1,p}$ definiert. (3)

Bemerkung: Den Banachraumm $(W^{1,p}, || \cdot ||_{W^{1,p}})$ nennt man auch den **ersten Sobolev-Raum** zu p.

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass die Abbildung $f \mapsto D_j$ (für $j = 1, ..., n$) offenbar linear ist. Mit $|| \cdot ||_p$ bezeichnen wir sowohl die L^p-Norm auf $L^p(\Omega)$ als auch die p-Norm auf $\mathbb{R}^{n+1}$. Wenn wir $a_p(f) := (||f||_p, ||D_1 f||_p, ..., ||D_n f||_p)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ für jedes $f \in W^{1,p}$ setzen, dann gilt offenbar $||f||_{W^{1,p}} = ||a_p(f)||_p$. Daraus folgt leicht, dass $|| \cdot ||_{W^{1,p}}$ eine Norm auf $W^{1,p}$ ist. Um die Vollständigkeit zu sehen, betrachten wir eine Cauchy-Folge $(f_k) \subset W^{1,p}$. Dann ist (f_k) auch eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ und für $j = 1, ..., n$ ist $(D_j f_k)$ ebenfalls eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$. Sei f der Grenzwert von (f_k) in $L^p(\Omega)$ und seien $f^{(1)}, ..., f^{(n)}$ die Grenzwerte von $(D_1 f_k), ..., (D_n f_k)$ in $L^p(\Omega)$.
Sei $p' \in (1, \infty]$ derart, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ist. Für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt $\varphi \in L^{p'}(\Omega)$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \in L^{p'}(\Omega)$ (für $j = 1, ..., n$). Damit sind die Abbildungen $L^p(\Omega) \to \mathbb{K}$, $g \mapsto \int_\Omega g f$ und $L^p(\Omega) \to \mathbb{K}$, $g \mapsto \int_\Omega g \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$ stetige lineare Funktionale auf $L^p(\Omega)$. Es folgt

$$-\int_\Omega f^{(j)} \; \varphi = \lim_k \big(-\int_\Omega D_j f_k \; \varphi \big) = \lim_k \int_\Omega f_k \; \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}.$$

Damit haben wir $f^{(j)} = D_j f$ für $j = 1, ..., n$ gezeigt. Es gilt somit

$$f_k \to f, \quad D_j f_k \to D_j f \;\text{ in } L^p(\Omega),$$

und somit $\lim_k f_k = f$ in $W^{1,p}$. Wir haben gezeigt, dass $(W^{1,p}, || \cdot ||_{W^{1,p}})$ vollständig ist.

(b) Im Falle $p = 2$ verwendet man häufig die Schreibweise $H^1 := W^{1,2}$. Zeigen Sie, dass es ein Skalarprodukt auf H^1 gibt, welches die Sobolev-Norm $|| \cdot ||_{H^1} := || \cdot ||_{W^{1,2}}$ induziert! (2)

Lösung: Eine Norm $|| \cdot ||$ auf einem Banachraum X kommt genau dann von einem Skalarprodukt, wenn sie die Parallelogramm-Gleichung $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x + y||^2 + ||x - y||^2$ für alle $x, y \in X$ erfüllt.
Für alle $f, g \in H^1$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
&||f + g||_{H^1}^2 + ||f - g||_{H^1}^2 = \\
&= \int_\Omega |f + g|^2 + \sum_{j=1}^n \int_\Omega |D_j f + D_j g|^2 + \int_\Omega |f - g|^2 + \sum_{j=1}^n |D_j g - D_j g|^2 = \\
&= 2 \int_\Omega |f|^2 + 2 \int_\Omega |g|^2 + 2 \sum_{j=1}^n \int_\Omega |D_j f|^2 + 2 \sum_{j=1}^n |D_j g|^2 = 2||f||_{H^1} + 2||g||_{H^1}.
\end{aligned}$$

Also erfüllt $|| \cdot ||_{H^1}$ die Parallelogramm-Gleichung und wird somit von einem Skalarprodukt induziert.

Bemerkung: Stattdessen hätten wir auch direkt nachrechnen können, dass

$$\langle f, g \rangle := \int_\Omega \overline{f} g + \sum_{j=1}^n \int_\Omega \overline{D_j f}\, D_j g$$

ein Skalarprodukt auf H^1 ist, welches die Sobolev-Norm $||\cdot||_{H^1}$ induziert.

(c) Sei $f : \Omega \to \mathbb{K}$ einmal stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Wenn $f \in L^p$ und $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p$ für alle $j = 1, ..., n$ gilt, so ist $f \in W^{1,p}$ und es gilt $D_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ für alle $j = 1, ..., n$. (2)

Lösung: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine beliebige Testfunktion. Weil der Träger von φ in Ω kompakt liegt, folgt durch partielle Integration für jedes $j = 1, ..., n$, dass

$$\int_\Omega f \,\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\varphi,$$

also haben wir $\frac{\partial f}{\partial x_j} = D_j f$ und wegen $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p$ auch $f \in H^1$ gezeigt.

Für die Lösung der nachfolgenden Aufgabe stellen wir das folgende Resultat bereit:
Sei nun $n = 1$ und sei $\Omega = J$ ein Intervall. Wir bezeichnen die schwache Ableitung von $f \in W^{1,p}$ dann auch mit f'. Man kann zeigen

$$W^{1,p} = \{f \in C(\overline{J}) \cap L^p(J) : \exists g \in L^p(J) : f(t) - f(s) = \int_s^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\forall s, t \in J\}.$$

Für jedes $f \in W^{1,p}$ ist das g aus obiger Menge eindeutig bestimmt, und es gilt gerade $g = f'$.

20. Sei $1 \le p < \infty$. Wir wollen die Erkenntnisse aus den Aufgaben 16 und 17 etwas verbessern. Zeigen Sie:

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In der Situation von Aufgabe 16 gilt dann $D(A) = W^{1,p}$ (hierbei ist $\Omega = \mathbb{R}$); außerdem ist $Af = \alpha f'$ für alle $f \in D(A)$ und es gilt $\sigma(A) = i\mathbb{R}$. (3)

Lösung: Seien $f, g \in L^p(\mathbb{R})$. Nach der Allerweltsformel gilt $f \in D(A)$ und $Af = g$ genau dann, wenn $\int_0^t T(s) g\,\mathrm{d}s = T(t)f - f$ gilt. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &\forall t \ge 0: \quad \int_0^t g(x + \alpha s)\,\mathrm{d}s = f(x + \alpha t) - f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad &\forall t \ge 0: \quad \frac{1}{\alpha}\int_x^{x+\alpha t} g(s)\,\mathrm{d}s = f(x + \alpha t) - f(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R} \quad (*). \end{aligned}$$

Ist $f \in W^{1,p}$ und $g = \alpha f'$, so ist $(*)$ offenbar erfüllt.
Ist umgekehrt $(*)$ erfüllt, so definieren wir $h(x) := \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weil g auf beschränkten Intervallen L^1-integrierbar ist, ist $h(x)$ stetig. Außerdem erfüllt h anstelle von f ebenfalls die Gleichung $(*)$ (und zwar sogar für alle $t \ge 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$).
Es folgt

$$\forall t \ge 0: \quad f(x + \alpha t) - f(x) = h(x + \alpha t) - h(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Nun sind die Abbildungen $(t, x) \mapsto f(x + \alpha t) - f(x)$ und $(t, x) \mapsto h(x + \alpha t) - h(x)$ Produkt-messbar; also stimmen sie bis auf eine Produkt-Nullmenge überein. Damit muss aber für fast alle x_0 gelten, dass

$$f(x_0 + \alpha t) - f(x_0) = h(x_0 + \alpha t) - h(x_0)$$

für fast alle $t \ge 0$ gilt. Für fast alle x_0 folgt also, dass $f - h$ auf $x_0 + \alpha[0, \infty)$ fast überall konstant ist. Somit muss aber $f - h$ auf $\mathbb{R}$ fast überall konstant sein. Folglich besitzt f einen stetigen Repräsentanten in $C(\mathbb{R})$ (den wir ebenfalls mit f bezeichnen).
Außerdem gilt für $x, y \in \mathbb{R}$, dass $f(y) - f(x) = h(y) - h(x) = \int_x^y g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Wegen $g \in L^p(\mathbb{R})$ ist damit $f \in W^{1,p}$ und $f' = g$ gezeigt.

Wir wollen nun noch $\sigma(A) = i\mathbb{R}$ zeigen. In Aufgabe 16 (c) haben wir bereits $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$ gesehen. Sei nun $i\beta \in i\mathbb{R}$ beliebig. Wir setzen $f_n(x) := (2n)^{-\frac{1}{p}} e^{i\frac{\beta}{\alpha}x - \frac{|x|}{np}}$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f_n \in W^{1,p} = D(A)$ und $||f_n||_p = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zugleich gilt aber

$$||Af_n - i\beta f_n||_p = ||\alpha(i\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\operatorname{sgn} x}{np})f_n - i\beta f_n||_p = \frac{|\alpha|}{np}||f_n||_p = \frac{|\alpha|}{np} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Wäre nun $i\beta \in \rho(A)$, so könnten wir $g_n := \frac{np}{|\alpha|}(Af_n - i\beta f_n)$ setzen und hätten damit einerseits $||g_n||_p = 1$, andererseits aber

$$|| \mathrm{R}(i\beta, A)g_n||_p = \frac{np}{|\alpha|}||f_n||_p = \frac{np}{|\alpha|} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Dies widerspricht der Stetigkeit von $\mathrm{R}(i\beta, A)$. Also ist $i\beta \in \sigma(A)$.

Bemerkung: Ist A ein Operator auf einem Banachraum X und $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass es eine Folge $(x_n) \subset X$ mit den Eigenschaften $||x_n|| = 1$, aber $||Ax_n - \lambda x_n|| \to 0$ gibt, so nennt man λ einen **approximativen Eigenwert** von A. Die Menge aller approximativen Eigenwerte von A bildet zusammen das **approximative Punktspektrum** $\sigma_{\mathrm{a}}(A)$ von A.

Es ist stets $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{a}}(A)$ und wie im letzten Schritt unseres soeben vorgeführten Beweises zeigt man, dass auch stets $\sigma_{\mathrm{a}}(A) \subset \sigma(A)$ gilt.

(b) In der Situation von Aufgabe 17 gilt $D(A) = \{f \in W^{1,p} : f(1) = 0\}$ (hierbei ist $\Omega = (0, 1)$). (2)
Außerdem ist $Af = f'$ für alle $f \in D(A)$.

Lösung: Wir verwenden wieder die Allerweltsformel: Für $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ gilt $f \in D(A)$ und $Af = g$ genau dann, wenn $\int_0^t T(s)g \,\mathrm{d}s = T(t)f - f$ für alle $t \geq 0$ gilt. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$(*) \qquad \forall t \geq 0: \quad \int_x^{1\wedge(t+x)} g(s)\,\mathrm{d}s = (T(t)f)(x) - f(x) \quad \text{für fast alle } x \in (0,1).$$

Für $f \in W^{1,p}$ mit $f(1) = 0$ sieht man wie in Aufgabe 17, dass $(*)$ erfüllt ist. Ist umgekehrt $(*)$ erfüllt, so gilt für $t = 1$ und für fast alle $x \in (0, 1)$ die Gleichheit $f(x) = -\int_x^1 g(s)\,\mathrm{d}s$. Weil g L^p- und somit L^1-integrierbar ist, ist die Abbildung $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\int_x^1 g(s)\,\mathrm{d}s$ stetig auf ganz $[0, 1]$, und es gilt $h(x) = f(x)$ für fast alle $x \in (0, 1)$. Also besitzt f den stetigen Repräsentanten $h|_{(0,1)}$, der sich zur stetigen Funktion h auf $[0, 1]$ fortsetzen lässt. Außerdem ist $h(y) - h(x) = \int_x^y g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ für alle $x, y \in (0, 1)$. Damit haben wir $f \in W^{1,p}$ und $f' = g$ gezeigt. Offensichtlich gilt zudem $h(1) = 0$.

21. Sei X ein Banachraum und A ein abgeschlossener Operator auf X. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** von A, wenn es ein $x \in D(A) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $Ax = \lambda x$ gibt. In diesem Fall heißt x ein **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ. Die Menge aller Eigenwerte von A nennt man das **Punktspektrum** von A und kürzt sie mit $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ ab.

Offenbar gilt $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \sigma(A)$.

(a) Zeigen Sie den Spektralen Abbildungssatz für das Punktspektrum von Resolventen: Für (1)
jedes $\mu \in \rho(A)$ gilt $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathrm{R}(\mu, A)) \setminus \{0\} = \frac{1}{\mu - \sigma_{\mathrm{p}}(A)}$.

Lösung: Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von $\mathrm{R}(\mu, A)$ mit zugehörigem Eigenvektor $x \in X$. Wegen $\lambda \neq 0$ gilt $\lambda = \frac{1}{\mu - \nu}$ für ein geeignetes $\nu \in \mathbb{C}$. Aus $\mathrm{R}(\mu, A)x = \frac{1}{\mu-\nu}x$ folgt aber

$$\begin{aligned} &(\mu - \nu)x = (\mu - A)x \\ \Rightarrow \quad &\nu x = Ax. \end{aligned}$$

Also ist ν ein Eigenwert von A und wir haben $\lambda = \frac{1}{\mu-\nu} \in \frac{1}{\mu - \sigma_{\mathrm{p}}(A)}$ gezeigt.

Ist umgekehrt $\lambda \in \frac{1}{\mu - \sigma_{\mathrm{p}}(A)}$, so gibt es ein $\nu \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ (mit einem Eigenvektor y), so dass $\lambda = \frac{1}{\mu-\nu}$ gilt. Aus $Ay = \nu y$ folgt aber

$$\begin{aligned} &(\mu - \nu)y = (\mu - A)y \\ \Rightarrow \quad &\mathrm{R}(\mu, A)y = \frac{1}{\mu - \nu}y = \lambda y. \end{aligned}$$

Also ist λ ein Eigenwert von $\mathrm{R}(\mu, A)$ und es gilt offensichtlich $\lambda \neq 0$.

(b) Sei $X = l^2(\mathbb{N})$, sei $\alpha = (\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Folge und sei M_α der zu α gehörende (2*)
Multiplikationsoperator auf X. Zeigen Sie: $\sigma_{\mathrm{p}}(M_\alpha) = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Lösung: „$\supset$“ Sei $e^{(n)}$ der n-te kanonische Einheitsvektor. Dann gilt $M_\alpha e^{(n)} = \alpha_n e^{(n)}$, also ist $\alpha_n \in \sigma_{\mathrm{p}}(M_\alpha)$.

„$\subset$“ Sei nun $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(M_\alpha)$ und sei $x \in l^2(\mathbb{N})$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gibt es eine von Null verschiedene Komponente x_k von x und somit ist $\alpha_k x_k = (M_\alpha x)_k = (\lambda x)_k = \lambda x_k$. Es folgt $\lambda = \alpha_k$.

(c) Finden Sie einen Operator A auf $X = l^2(\mathbb{N}_0)$ mit $\sigma_p(A) = \emptyset$, aber $\sigma(A) \neq \emptyset$. (2*)

Lösung: Sei $S : X \to X$, $(x_1, x_2, ...) \mapsto (0, x_1, x_2, ...)$ der Rechts-Shift auf X. Dann ist S beschränkt (sogar isometrisch) und besitzt somit nichtleeres Spektrum. Andererseits gilt $\sigma_p(S) = \emptyset$, denn 0 ist wegen der Injektivität von S kein Eigenwert von S, und wäre $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von S mit Eigenvektor x, dann würde $x_1 = 0$ und sukzessive $x_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgen. Dies widerspricht aber der Definition eines Eigenvektors.

(d) Sei $X = C([0,1])$, $D(A) = C^1([0,1])$ und $Af = f'$ für alle $f \in D(A)$. Bestimmen Sie Spektrum und Punktspektrum von A! Erzeugt A eine Halbgruppe auf X? (2*)

Lösung: Es ist $\sigma_p(A) = \mathbb{C}$: Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ liegt nämlich die Funktion $e_\lambda : [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\lambda t}$ in $D(A)$ und es gilt $Ae_\lambda = \lambda e_\lambda$.
Wegen $\sigma(A) \supset \sigma_p(A) = \mathbb{C}$ folgt auch $\sigma(A) = \mathbb{C}$. Damit kann A keine stark stetige Halbgruppe erzeugen, denn das Spektrum des Generators einer C_0-Halbgruppe ist nach rechts beschränkt.

22. Sei X ein Banachraum und A ein abgeschlossener Operator auf X mit nichtleerer Resolventenmenge. Wir sagen, dass A kompakte Resolvente besitzt, falls für alle $\lambda \in \rho(A)$ die Resolvente $\mathrm{R}(\lambda, A)$ ein kompakter Operator ist.

(a) Zeigen Sie: A besitzt bereits dann kompakte Resolvente, wenn es ein $\lambda \in \rho(A)$ gibt, für das $\mathrm{R}(\lambda, A)$ kompakt ist. (1)

Lösung: Sei $\mu \in \rho(A)$ beliebig. Aus der Resolventengleichung folgt

$$\mathrm{R}(\mu, A) = \mathrm{R}(\lambda, A) + (\lambda - \mu)\,\mathrm{R}(\mu, A)\,\mathrm{R}(\lambda, A).$$

Weil $\mathrm{R}(\lambda, A)$ nach Voraussetzung kompakt ist, und die Menge der kompakten Operatoren ein Ideal in $\mathcal{L}(X)$ ist, muss auch $\mathrm{R}(\mu, A)$ kompakt sein.

(b) Zeigen Sie: Wenn $\dim X = \infty$ gilt und A kompakte Resolvente besitzt, dann muss A unbeschränkt sein. (1)

Lösung: Sei $\lambda \in \rho(A)$ und sei $B := \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in X. Es gilt $B = (\lambda - A)\,\mathrm{R}(\lambda, A)B$ und es ist $\mathrm{R}(\lambda, A)B$ relativ kompakt in X; wäre A (und somit $\lambda - A$) stetig, so müsst folglich auch B relativ kompakt sein. Damit würde aber $\dim X < \infty$ folgen.

(c) Folgern Sie aus Aufgabe 19 (a): Falls A kompakte Resolvente besitzt, so ist das Spektrum von A höchstens abzählbar und es gilt $\sigma(A) = \sigma_p(A)$. (1)

Lösung: Sei $\mu \in \rho(A)$ und $\mathrm{R}(\mu, A)$ kompakt. Nach der Schauder-Theorie kompakter Operatoren folgt, dass $\sigma(\mathrm{R}(\mu, A))$ höchstens abzählbar ist und dass $\sigma(\mathrm{R}(\mu, A))\backslash\{0\} = \sigma_p(\mathrm{R}(\mu, A))\backslash\{0\}$ gilt. Aus Aufgabe 19 (a) und Aufgabe 13 folgt nun

$$\frac{1}{\mu - \sigma(A)} = \sigma(\mathrm{R}(\mu, A)) \setminus \{0\} = \sigma_p(\mathrm{R}(\mu, A)) \setminus \{0\} = \frac{1}{\mu - \sigma_p(A)}.$$

Dies zeigt die Behauptung.

(d) Sei $||\cdot||_A$ die Graphen-Norm auf $D(A)$. Zeigen Sie: A besitzt genau dann kompakte Resolvente, wenn die kanonische Injektion $(D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow (X, ||\cdot||)$ kompakt ist. (2)

Lösung: Sei $\mu \in \rho(A)$. Wir betrachten die folgenden Operatoren (beachten Sie die jeweiligen Normen auf Definitions- und Wertebereich!):

$$\begin{aligned}
&\mu - A : (D(A), ||\cdot||) \to (X, ||\cdot||)\\
&(\mu - A)\tilde{} : (D(A), ||\cdot||_A) \to (X, ||\cdot||)\\
&\mathrm{R}(\mu, A) : (X, ||\cdot||) \to (D(A), ||\cdot||)\\
&\mathrm{R}(\mu, A)\tilde{} : (X, ||\cdot||) \to (D(A), ||\cdot||_A)\\
&\tilde{i} : (D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow (X, ||\cdot||),
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{i}$ die kanonische Injektion bezeichnet, und alle anderen Bezeichnungen wie üblich gewählt sind. Die Indizierung mit einer Tilde deutet hier lediglich an, dass wir auf $D(A)$ die Graphennorm $||\cdot||_A$ betrachten.
Man beachte, dass bis auf $\mu - A$ alle oben angegebenen Operatoren stetig sind (die Stetigkeit von $\mathrm{R}(\mu, A)\tilde{}$ folgt aus dem Satz von der stetigen Inversen). Nun ist

$$\mathrm{R}(\mu, A) = \tilde{i} \circ \mathrm{R}(\mu, A)\tilde{} \quad \text{und} \quad \tilde{i} = \mathrm{R}(\mu, A)(\mu - A)\tilde{}.$$

Also ist $\mathrm{R}(\mu, A)$ genau dann kompakt, wenn $\tilde{i}$ kompakt ist.

(e) Charakterisieren Sie, wann ein Multiplikationsoperator auf $l^2(\mathbb{N})$ kompakte Resolvente besitzt! (2*)

Lösung: Sei $\alpha = (\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge und sei M_α der zugehörige Multiplikationsoperator. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt **Häufungspunkt** der Folge (α_n), falls es eine gegen z konvergente Teilfolge von (α_n) gibt (beachten Sie, dass ein Häufungspunkt der Folge (α_n) nicht unbedingt ein Häufungspunkt der Menge $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ zu sein braucht).

Wir zeigen, dass die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

(i) Der Multiplikationsoperator M_α besitzt kompakte Resolvente.

(ii) Die Folge (α_n) besitzt keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$.

(iii) Es gilt $|\alpha_n| \to \infty$ für $n \to \infty$.

Beweis. *„(ii) $\Leftrightarrow$ (iii)“* Klar.
„(i) $\Leftrightarrow$ (iii)“ Sei $\mu \notin \sigma(M_\alpha) = \overline{\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Dann ist $\mathrm{R}(\mu, A)$ der Multiplikationsoperator M_β zur Folge $\beta = (\beta_n) = (\frac{1}{\mu - \alpha_n})$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$
\begin{aligned}
& A \text{ besitzt kompakte Resolvente} \\
\Leftrightarrow\quad & M_\beta \text{ ist kompakt} \\
\Leftrightarrow\quad & (\beta_n) \text{ ist eine Nullfolge} \\
\Leftrightarrow\quad & |\alpha_n| \to \infty \quad (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

Dies zeigt die Behauptung. □