Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 22.05.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück

Sommersemester 2013
Punktzahl: 19+6*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 4

23. Seien X, Y Banachräume, sei $U \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Isomorphismus und sei $(T(t))_{t \geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X.

(a) Zeigen Sie, dass $(S(t))_{t\geq 0}$ mit $S(t) = UT(t)U^{-1}$ eine stark stetige Halbgruppe auf Y ist. (2)

Lösung: Es gilt $S(0) = UI_XU^{-1} = I_Y$ und für alle $s, t \geq 0$ gilt $S(s)S(t) = UT(s)U^{-1}UT(t)U^{-1} = UT(s+t)U^{-1} = S(s+t)$.
Außerdem gilt wegen der starken Stetigkeit von $(T(t))_{t\geq 0}$ für jedes $y \in Y$, dass $T(t)(U^{-1}y) \to U^{-1}y$ für $t \to 0$ und somit

$$S(t)y = UT(t)U^{-1}y \to UU^{-1}y = y \quad (t \to 0).$$

Somit ist $(S(t))_{t\geq 0}$ stark stetig.

(b) Sei nun $(S(t))_{t\geq 0}$ eine beliebige stark stetige Halbgruppe auf Y. Mit A und B bezeichnen wir die Generatoren von $(T(t))_{t\geq 0}$ und $(S(t))_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (7)

(i) $UT(t) = S(t)U$ für alle $t \geq 0$.
(ii) $D(B) = U(D(A))$ und $UAx = BUx$ für alle $x \in D(A)$.
(iii) $\exists \lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ mit $U\,\mathrm{R}(\lambda, A) = \mathrm{R}(\lambda, B)U$.
(iv) $\rho(A) = \rho(B)$ und $U\,\mathrm{R}(\lambda, A) = \mathrm{R}(\lambda, B)U$ für alle $\lambda \in \rho(A) = \rho(B)$.

Lösung: *„(i) ⇒ (ii)“* Für $x \in D(A)$ gilt

$$\frac{1}{t}(S(t)Ux - Ux) = \frac{1}{t}(UT(t)x - Ux) = U\frac{1}{t}(T(t)x - x) \to UAx \quad (t \to 0).$$

Also ist $U(D(A)) \subset D(B)$ und $BUx = UAx$ für alle $x \in D(A)$. Durch Vertauschung der Bezeichnungen folgt aus dem Gezeigten aber auch, dass $U^{-1}(D(B)) \subset D(A)$ ist. Damit haben wir insgesamt $D(B) = U(D(A))$ bewiesen.

„(ii) ⇒ (i)“ Nach Teilaufgabe (a) ist $(R(t))_{t\geq 0} := (U^{-1}S(t)U)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X und aus der gerade gezeigten Implikation folgt, dass $(R(t))_{t\geq 0}$ den Generator $C = U^{-1}BU|_{D(C)}$ mit Definitionsbereich $D(C) = U^{-1}(D(B))$ besitzt.
Es ist aber nach Voraussetzung $U^{-1}(D(B)) = D(A)$ und $U^{-1}BU|_{D(A)} = A$. Damit besitzen die beiden C_0-Halbgruppen $(T(t))_{t\geq 0}$ und $(R(t))_{t\geq 0} = (U^{-1}S(t)U)_{t\geq 0}$ denselben Generator und sind somit gleich. Es folgt (i).

„(ii) ⇒ (iv)“ Es ist $A = U^{-1}BU|_{D(A)}$ und somit $\lambda - A = U^{-1}(\lambda - B)U|_{D(A)} = U^{-1}(\lambda - B)U|_{U^{-1}(D(B))}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Folglich ist $\lambda - A$ genau dann intervertierbar, wenn $\lambda - B$ invertierbar ist; dies zeigt $\rho(A) = \rho(B)$.
Außerdem rechnet man mit Hilfe der Gleichung $\lambda - A = U^{-1}(\lambda - B)U|_{D(A)}$ sofort nach, dass

$$U^{-1}\,\mathrm{R}(\lambda, B)U\;(\lambda - A) = I_{D(A)} \quad \text{und} \quad (\lambda - A)\;U^{-1}\,\mathrm{R}(\lambda, B)U|_{D(A)} = I_X$$

für alle $\lambda \in \rho(A) = \rho(B)$ gilt. Folglich ist $U^{-1}\,\mathrm{R}(\lambda, B)U = \mathrm{R}(\lambda, A)$ und es folgt die Behauptung.

„(iv) ⇒ (iii)“ Klar, da $\rho(A) \neq \emptyset$.
„(iii) ⇒ (ii)“ Sei $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ derart, dass $\mathrm{R}(\lambda, B)U = U\,\mathrm{R}(\lambda, A)$ ist. Es gilt $D(B) = \mathrm{im}(\mathrm{R}(\lambda, B)U) = \mathrm{im}(U\,\mathrm{R}(\lambda, A)) = U(D(A))$. Außerdem ist

$$U^{-1}\,\mathrm{R}(\lambda, B)U\;(\lambda - A) = I_{D(A)},$$

woraus

$$(\lambda - B)U|_{D(A)} = (\lambda - B)UI_{D(A)} = (\lambda - B)U\;U^{-1}\,\mathrm{R}(\lambda, B)U\;(\lambda - A) = U(\lambda - A)$$

und somit $UA = BU|_{D(A)}$ folgt.

24. Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Generator A. Außerdem sei $X_1 := D(A)$. Dann ist X_1 zusammen mit der Graphennorm $||\cdot||_A$ ein Banachraum.

(a) Zeigen Sie, dass die Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ den Raum X_1 invariant lässt, d.h. es gilt $T(t)x \in X_1$ für alle $x \in X_1$ und alle $t \geq 0$. (1*)

Lösung: Das folgt unmittelbar aus Proposition 2.6.

(b) Für alle $t \geq 0$ sei $T_1(t) := T(t)|_{X_1}$. Zeigen Sie, dass $(T_1(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X_1 ist. (1*)

Lösung: Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $0 \in \rho(A)$ gilt (ansonsten führen wir eine Reskalierung durch). Nun sind $A : (D(A), ||\cdot||) \to (X, ||\cdot||)$ und $A^{-1} : (X, ||\cdot||) \to (D(A), ||\cdot||)$ Banachraum-Isomorphismen.

Für jedes $x \in D(A)$ und jedes $t \geq 0$ gilt $T(t)Ax = AT(t)x = AT_1(t)x$, also ist $T(t)A = AT_1(t)$ und somit $T_1(t) = A^{-1}T(t)A$. Damit folgt aus Aufgabe 23 (a), dass $T_1(t)$ eine stark stetige Halbgruppe auf X_1 ist.

(c) Sei A_1 der Generator von $(T_1(t))_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $D(A_1) = D(A^2) := \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$ und $A_1x = Ax$ für alle $x \in D(A_1)$ gilt. (2*)

Lösung: Aus dem Beweis von Teilaufgabe (b) folgt, dass $A^{-1}T(t) = T_1(t)A^{-1}$ für alle $t \geq 0$ gilt. Damit folgt aber aus Aufgabe 24 (b) (ii), dass

$$D(A_1) = A^{-1}D(A) = D(A^2)$$

gilt, und dass $x = A^{-1}Ax = A_1A^{-1}x$ für alle $x \in D(A)$ gilt. Für alle $x \in D(A_1)$ ist aber $Ax \in D(A)$ und somit $Ax = A_1A^{-1}Ax = A_1x$.

(d) Zeigen Sie: Es gilt $\rho(A_1) = \rho(A)$ und $\mathrm{R}(\lambda, A_1) = \mathrm{R}(\lambda, A)|_{X_1}$ für alle $\lambda \in \rho(A_1) = \rho(A)$. (2*)

Lösung: Nach Aufgabe 24 (b) (iv) ist $\rho(A_1) = \rho(A)$ und für jedes $\lambda \in \rho(A_1) = \rho(A)$ gilt $A^{-1}\,\mathrm{R}(\lambda, A) = \mathrm{R}(\lambda, A_1)A^{-1}$. Für alle $x \in D(A)$ folgt

$$\mathrm{R}(\lambda, A_1)x = A^{-1}\,\mathrm{R}(\lambda, A)Ax = \mathrm{R}(\lambda, A)A^{-1}Ax = \mathrm{R}(\lambda, A)x.$$

Tipp für die Teilaufgaben (b) - (d): Nehmen Sie ohne Einschränkung an, dass $0 \in \rho(A)$ gilt und wenden Sie Aufgabe 23 auf den Isomorphismus $A^{-1} : X \to X_1$ an.

25. Sei X ein Banachraum und A ein abgeschlossener Operator auf X mit Definitionbereich $D(A)$. Zudem sei $\lambda \in \rho(A)$ und $D_0 \subset D(A)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (5)

(i) D_0 ist ein wesentlicher Definitionsbereich (engl. „core“) für A.

(ii) $(\lambda - A)D_0$ liegt dicht in X.

(iii) $A|_{D_0}$ besitzt den Abschluss A.

Lösung: *„(i) $\Leftrightarrow$ (ii)“* Weil $\lambda - A : (D(A), ||\cdot||_A) \to (X, ||\cdot||)$ bijektiv und stetig ist, folgt aus dem Satz von der stetigen Inversen, dass $\lambda - A$ sogar ein Banachraum-Isomorphismus ist. Also gilt für jedes Teilmenge $M \subset D(A)$: M liegt genau dann dicht in $(D(A), ||\cdot||_A)$, wenn $(\lambda - A)(M)$ dicht in $(X, ||\cdot||)$ liegt. Dies ziegt die Behauptung.

„(i) $\Leftrightarrow$ (iii)“ Es ist $A|_{D_0}$ genau dann abschließbar mit Abschluss A, wenn $G(A) = \overline{G(A|_{D_0})}$ in $X \times X$ gilt (wobei $X \times X$ wie üblich mit der Norm $||(x, y)||_1 := ||x|| + ||y||$ ausgestattet ist). Nun ist die Abbildung $\Phi : (D(A), ||\cdot||_A) \to (G(A), ||\cdot||_1)$, $x \mapsto (x, Ax)$ stetig und bijektiv und somit ein Banachraum-Isomorphismus. Also liegt D_0 genau dann dicht in $D(A)$ bzgl. $||\cdot||_A$, wenn $\Phi(D_0) = G(A|_{D_0})$ dicht in $G(A)$ bzgl. $||\cdot||_1$ liegt. Dies zeigt die Behauptung.

26. Sei $X = l^2(\mathbb{N})$ und sei $(T(t))_{t\geq 0}$ die Halbgruppe auf X aus Aufgabe 6, die durch $T(t)x = (e^{-nt}x_n)$ gegeben ist. Mit A bezeichnen wir den Generator von $(T(t))_{t\geq 0}$

(a) Zeigen Sie, dass $D(A) = \{x \in X : (-nx_n) \in X\}$ und $Ax = (-nx_n)$ für alle $x \in D(A)$ gilt. (3)

Lösung: Wir verwenden wie üblich die Allerweltsformel: Für $x, y \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
& x \in D(A) \quad \text{und} \quad Ax = y \\
\Leftrightarrow \quad & \Big(\int_0^t T(s)y \, \mathrm{d}s\Big)(n) = (T(t)x)(n) - x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \int_0^t e^{-ns} y_n \, \mathrm{d}s = e^{-nt} x_n - x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{n}\big(e^{-nt} - 1\big) y_n = \big(e^{-nt} - 1\big) x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & y_n = -n x_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow \quad & (-n x_n) \in X \quad \text{und} \quad (y_n) = (-n x_n).
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung.

(b) Zeigen Sie, dass c_{00} ein wesentlicher Definitionsbereich von A ist. (2)

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass $c_{00} \subset D(A)$ gilt. Wir rechnen nun nach, dass c_{00} bezüglich der Graphennorm $|| \cdot ||_A$ dicht in $D(A)$ liegt:
Sei dazu $x \in D(A)$, d.h. $x \in X$ derart, dass $(-n x_n) \in X$ gilt. Außerdem sei $\varepsilon > 0$. Wegen $(x_n) \in X$ und $(-n x_n) \in X$ gilt

$$\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} |-n x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

für ein genügend großes $N \in \mathbb{N}$. Sei nun $z \in X$ die Projektion von x auf die ersten N Komponenten. Dann gilt $z \in c_{00}$ und

$$||x - z||_A = \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} |-n x_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < 2\varepsilon.$$

Also liegt c_{00} dicht in $D(A)$ bezüglich $|| \cdot ||_A$.