Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 05.06.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 19+7*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 6

31. Sei H ein beliebiger Hilbertraum und A ein selbst-adjungierter Operator auf H mit $\sigma(A) \subset (-\infty, 0]$. Sei außerdem $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ beliebig. Zeigen Sie, dass A eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel θ erzeugt. (2)

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für einen selbst-adjungierten Operator A mit $\sigma(A) \subset (-\infty, 0]$ für jedes $x \in D(A)$ die Abschätzung $\langle x, Ax\rangle \leq 0$ gilt.

Lösung: Wegen $I \in \rho(A)$, ist $I - A$ surjektiv.

Der Vollständigkeit halber zeigen wir als nächstes, wie man die Aussage im Hinweis beweisen kann, wenn man diese Aussage bereits für Operatoren aus $\mathcal{L}(H)$ kennt: Offenbar ist $\langle x, Ax\rangle \in \mathbb{R}$ für jedes $x \in D(A)$. Wir zeigen, dass sogar $\langle x, Ax\rangle \leq 0$ für alle $x \in D(A)$ gilt:

Sei zunächst $0 \in \rho(A)$ vorausgesetzt. Dann ist A^{-1} ebenfalls selbstadjungiert und nach dem spektralen Abbildungssatz für Resolventen gilt $\sigma(A^{-1}) \subset (-\infty, 0)$. Aus der Spektraltheorie selbstadjungierter beschränkter Operatoren auf Hilberträumen folgt nun $\langle A^{-1}y, y\rangle \leq 0$ für alle $y \in H$ und somit $\langle x, Ax\rangle \leq 0$ für alle $x \in D(A)$.

Wenn nun aber $0 \in \sigma(A)$ gilt, so folgt für jedes $\varepsilon > 0$, dass $\sigma(A - \varepsilon) \subset (-\infty, 0)$ und somit $\langle x, (A - \varepsilon)x\rangle \leq 0$ für alle $x \in D(A)$. Der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert $\langle x, Ax\rangle \leq 0$. Damit ist die Aussage im Hinweis bewiesen.

Nun folgt für jedes $x \in D(A)$:

$$\operatorname{Re}\langle x, e^{\pm i\theta}Ax\rangle = \langle x, Ax\rangle \operatorname{Re} e^{\pm i\theta} \leq 0,$$

da $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$ ist. Also ist $e^{\pm i\theta}A$ dissipativ und Theorem 9.9 liefert die Behauptung.

32. Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und sei X die Menge aller beschränkten, holomorphen, gleichmäßig stetigen Funktionen auf Σ_θ.

(a) Zeigen Sie, dass X bezüglich der Supremumsnorm ein Banachraum ist. (3)

Lösung: Sei $(f_n) \subset X$ eine Cauchy-Folge. Weil die Menge $C_b(\Sigma_\theta)$ aller beschränkten, stetigen Funktionen auf Σ_θ ein Banachraum ist, gibt es ein $f \in C_b(\Sigma_\theta)$ mit er Eigenschaft $f_n \to f$ bzgl. $||\cdot||_\infty$.
Um die gleichmäßige Stetigkeit von f zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $||f - f_{n_0}||_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Weil f_{n_0} gleichmäßig stetig ist, gibt es wiederum ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $z_1, z_2 \in \Sigma_\theta$ mit $|z_2 - z_1| < \delta$ stets $|f_{n_0}(z_2) - f_{n_0}(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Also gilt für $z_1, z_2 \in \Sigma_\theta$ mit $|z_2 - z_1|$ auch

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq |f(z_2) - f_{n_0}(z_2)| + |f_{n_0}(z_2) - f_{n_0}(z_1)| + |f_{n_0}(z_1) - f(z_1)| < \varepsilon.$$

Dies zeigt die gleichmäßige Stetigkeit von f.
Die Holomorphie von f folgt aus dem Satz von Vitali, weil alle (f_n) auf ganz Σ_θ beschränkt und wegen der gleichmäßigen Konvergenz sogar gleichmäßig beschränkt sind.

(b) Sei $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ durch $T(t)f = f(t + \cdot)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X ist. (2)

Lösung: Die Halbgruppen-Eigenschaft ist klar und die starke Stetigkeit folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit aller Funktionen $f \in X$.

(c) Für jedes $z \in \Sigma_\theta$ und jedes $f \in X$ setzen wir nun $T(z)f = f(z + \cdot)$. (3)
Zeigen Sie, dass die Abbildung $z \mapsto T(z)$ auf Σ_θ holomorph ist und folgern Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel θ ist.

Lösung: Für jedes $\lambda \in \Sigma_\theta$ definieren wir ein stetiges Funktional $\delta_\lambda \in X'$ durch $\delta_\lambda(g) = g(\lambda)$. Für jedes $f \in X$ und jedes $\delta \in X'$ sei $\varphi_{f,\delta} \in \mathcal{L}(X)'$ durch $\varphi(S) = \langle \delta, Sf\rangle$ gegeben. Dann ist die Abbildung

$$\Sigma_\theta \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \varphi_{f,\delta_\lambda} = \langle \delta_\lambda, T(z)f\rangle = f(z + \lambda)$$

holomorph auf Σ_θ. Zugleich trennt die Menge $\{\varphi_{f,\delta_\lambda} : f \in X, \lambda \in \Sigma_\theta\}$ den Raum $\mathcal{L}(X)$ (weil $\{\delta_\lambda : \lambda \in \Sigma_\theta\} \subset X'$ den Raum X trennt). Also folgt, dass auch $z \mapsto T(z)$ auf Σ_θ holomorph ist.

Somit besitzt $(T(t))_{t\geq 0}$ eine holomorphe Fortsetzung auf den Sektor Σ_θ. Dass T auf dem gesamten Sektor kontraktiv ist, folgt aus $||T(z)f||_\infty = \sup_{\lambda \in (z+\Sigma_\theta)|f(\lambda)|} \leq \sup_{\lambda\in\Sigma_\theta} |f(\lambda)| = ||f||_\infty$.

(d) Zeigen Sie, dass $t \mapsto T(t)$ in $t = 0$ nicht stetig bezüglich der Operatornorm ist. (2)

Tipp: Betrachten Sie die Funktionen $z \mapsto \exp(-nz)$.

Lösung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \Sigma_\theta \to \mathbb{C}$ durch $f_n(z) = \exp(-nz)$ gegeben. Offfenbar ist f_n holomorph und beschränkt. Aus den Eigenschaften der komplexen e-Funktion folgt leicht, dass f_n auch gleichmäßig stetig ist.

Es ist $||f_n||_\infty = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zugleich ist aber

$$||T(\frac{1}{n})f_n - f)||_\infty \geq |(T(\frac{1}{n})f_n)(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = |f_n(\frac{2}{n}) - f_n(\frac{1}{n})| = e^{-1} - e^{-2}.$$

Dies zeigt $||T(\frac{1}{n}) - I|| \geq e^{-1} - e^{-2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(e) Bestimmen Sie den Generator A von $(T(t))_{t\geq 0}$. (4)

Lösung: Wir zeigen, dass $D(A) = \{f \in X : f' \in X\}$ und $Af = f'$ für alle $f \in D(A)$ gilt. Dazu verwenden die Allerweltsformel: Seien $f, g \in X$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & f \in D(A) \text{ und } Af = g \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \geq 0 : \int_0^t T(s)g \, \mathrm{d}s = T(t)f - f \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \geq 0 \; \forall z \in \Sigma_\theta : \int_0^t (T(s)g)(z) \, \mathrm{d}s = (T(t)f)(z) - f(z) \end{aligned}$$

Im Falle $f' \in X$ und $f' = g$ ist die letzte Zeile offenbar erfüllt. Ist umgekehrt die letzte Zeile erfüllt, so folgt für jedes $z \in \Sigma_\theta$, dass die Funktion $(T(t))f(z) = f(t+z)$ bzgl. t eine Stammfunktion von $(T(t)g)(z) = g(z+t)$ ist. Also folgt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z+t) = g(z+t)$, wobei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ hier die reelle Ableitung nach t bezeichnet. Es gilt aber $f'(z+t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(z+t)$, wobei $f'(\cdot)$ die komplexe Ableitung von $f(\cdot)$ bezeichnet, also folgt $f'(z+t) = g(z+t)$ für alle $z \in \Sigma_\theta$ und für alle $t \geq 0$. Dies impliziert $f' = g$ und somit auch $f' \in X$.

33. Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0}$ eine sektoriell kontraktive holomorphe Halbgruppe vom Winkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ mit Generator A. Zeigen Sie, dass $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta} \subset \rho(A)$ gilt, wobei wir $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta} := \{re^{i\alpha} : r > 0, |\alpha| < \frac{\pi}{2} + \theta\}$ setzen. (3)

Lösung: Nach Vorlesung ist $e^{\pm i\theta}$ Generator der kontraktiven C_0-Halbgruppe $(T(e^{i\theta}t))_{t\geq 0}$. Also folgt $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \subset \rho(e^{\pm i\theta}A)$. Hieraus erhalten wir $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta} \subset e^{-i\theta}\mathbb{C}_+ \cup e^{i\theta}\mathbb{C}_+ \subset \rho(A)$.

34. Wie in Aufgabe 30 sei $H = L^2(0, 2\pi)$, sei $D(A) = \{f \in H^2(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$ und $A : D(A) \to H$, $f \mapsto f''$. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Problem (7*)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t,\cdot) = Au(t,\cdot) \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

für alle $u_0 \in D(A)$ eine Lösung besitzt und geben Sie die Lösung für die Startfunktion $u_0(x) = \sin(\frac{x}{2}) + \sin(x)$ explizit an!

Tipp für die Berechnung der Lösung: Gehen Sie ähnlich vor, wie in den Aufgaben 29 und 30. Sie dürfen hierbei verwenden, dass für $\lambda = (\lambda_n) \subset (-\infty, 0]$ der Multiplikationsoperator M_λ auf l^2 die Halbgruppe $(M_{e^{\lambda t}})$ erzeugt (wobei wir $e^{\lambda t} = (e^{\lambda_n t})$ gesetzt haben).

Lösung: Wir wissen bereits aus Aufgabe 30, dass das Spektrum von $\sigma(A) = \{-\frac{n^2}{4} : n \in \mathbb{N}\}$ gilt und dass A selbstadjungiert ist. Also ist A nach Aufgabe 30 Generator einer C_0-Halbgruppe $T(t)$. Somit besitzt die angegebene Cauchy-Problem für jedes $u_0 \in D(A)$ eine Lösung, namentlich $u(t,\cdot) = T(t)u_0$.

Um die Lösung zu berechnen gehen wir vor wie in den Aufgaben 29 und 30: Es gibt eine ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ von H, die aus Eigenvektoren zu A besteht (nach Aufgabe 30 ist $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\frac{n}{2}x)$, und diese Funktion ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_n = -\frac{n^2}{4}$).

Sei nun $U : H \to l^2$ der Hilbertraum-Isomorphismus, der jedem $f \in H$ die Folge seiner Fourierkoeffizienten bzgl. der ONB $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ zuordnet. Dann wissen wir aus Aufgabe 29, dass für den Multiplikationsoperator M_λ auf l^2 gilt: $UD(A) = D(M_\lambda)$ und $UA = M_\lambda U|_{D(A)}$.

Es erzeugt M_λ auf l^2 die C_0-Halbgruppe $(M_{e^{\lambda t}})_{t \geq 0}$. Aufgabe 23 impliziert somit die Gleichung $UT(t) = M_{e^{\lambda t}} U$ für alle $t \geq 0$. Für $f \in H$ folgt somit

$$T(t)f = U^{-1} M_{e^{\lambda t}} U f = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle e_n, f \rangle e_n.$$

Für $u_0(x) = \sin(\frac{x}{2}) + \sin(x) = \sqrt{\pi}(e_1 + e_2)$ können wir die Lösung nun explizit ausrechnen: Es ist

$$\begin{aligned} u(t,x) = (T(t)u_0)(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle e_n, u_0 \rangle e_n(x) = e^{-\frac{1}{4}t} \sqrt{\pi} e_1(x) + e^{-\frac{4}{4}t} \sqrt{\pi} e_2(x) = \\ &= e^{-\frac{1}{4}t} \sin(\frac{x}{2}) + e^{-t} \sin(x). \end{aligned}$$