Universität Ulm
Abgabe: Mittwoch, 12.06.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 17+13*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 7

35. Sei X ein komplexer Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Sei $U \supset \sigma(T)$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Beweisen Sie den Spektralen Abbildungssatz für den holomorphen Funktionalkalkül: $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$. (5)

Tipp für die Inklusion „$\supset$“ : Definieren Sie für festes $\mu \in \sigma(T)$ eine holomorphe Funktion

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}, & \text{falls } \lambda \neq \mu \\ f'(\lambda), & \text{falls } \lambda = \mu \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass $(\mu - T)g(T) = g(T)(\mu - T) = f(\mu) - f(T)$ gilt.

Lösung: Wir zeigen zuerst die Inklusion „$\subset$“ : Sei dazu $\mu \notin f(\sigma(T))$. Dann ist $\mu - f(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in \sigma(T)$ und aus Stetigkeitsgründen sogar für alle λ aus einer offenen Menge $U \supset \sigma(T)$. Somit ist $h(\cdot) = \frac{1}{\mu - f(\cdot)}$ holomorph auf U. Nach Satz 10.2 gilt $(\mu - f(T))h(T) = I$ und ebenso $h(T)(\mu - f(T)) = I$. Dies zeigt $\mu \notin \sigma(f(T))$.

Nun zeigen wir die Inklusion „$\supset$“ : Sei $\nu \in f(\sigma(T))$, d.h. $\nu = f(\mu)$ für ein $\mu \in \sigma(T)$. Sei nun g definiert wie im Tipp. Dann ist g holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und wieder aus Satz 10.2 folgt $(\mu - T)g(T) = g(T)(\mu - T) = f(\mu) - f(T)$.
Wäre nun $f(\mu) - f(T)$ bijektiv, so würde $(f(\mu) - f(T))^{-1}g(T)(\mu - T) = I$ und $(\mu - T)g(T)(f(\mu) - f(T))^{-1} = I$ folgen. Damit wäre auch $\mu - T$ invertierbar, was wegen $\mu \in \sigma(T)$ nicht sein kann. Damit haben wir $\nu = f(\mu) \in \sigma(f(T))$ gezeigt.

(b) Sei $\mu \in \rho(A)$ und $r_\mu : \mathbb{C} \setminus \{\mu\} \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \frac{1}{\mu-\lambda}$. Zeigen Sie, dass $r_\mu(T) = \mathrm{R}(\mu, T)$ gilt. (2)
Bemerkung: Dies zeigt übrigens, dass der Spektrale Abbildungssatz für Resolventen ein Spezialfall des Spektralen Abbildungssatzes für den holomorphen Funktionalkalkül ist.

Lösung: Es ist r_μ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\mu\} \supset \sigma(T)$. Nach Satz 10.2 gilt $r_\mu(T)(\mu - T) = \mathbb{1}(T) = I$, also $r_\mu(T) = (\mu - T)^{-1}$.

(c) Sei nun $V \supset f(\sigma(R))$ offen und $g : V \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von U, die ebenfalls ganz $\sigma(T)$ enthält. Wir bezeichnen die Einschränkung von f auf die Menge $f^{-1}(V)$ wieder mit f. (6*)
Zeigen Sie: $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.
Tipp: Zeigen Sie ähnlich wie in Teilaufgabe (b), dass für $\mu \in \rho(f(T))$ und $\hat{r}_\mu : \mathbb{C} \setminus f^{-1}(\{\mu\}) \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \frac{1}{\mu - f(\lambda)}$ die Gleichheit $\hat{r}_\mu(T) = \mathrm{R}(\mu, f(T))$ gilt. Dadurch können Sie in der Integraldarstellung von $g(f(T))$ die Resolvente $\mathrm{R}(\lambda, f(T))$ durch ein weiteres Kurvenintegral ersetzen.

Lösung: Für jedes feste $\mu \in \rho(f(T))$ ist $\hat{r}_\mu$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus f^{-1}\{\mu\} \supset \sigma(T)$ und wegen Satz 10.2 gilt $\hat{r}_\mu(T)(\mu - f(T)) = I$, also $\hat{r}_\mu(T) = \mathrm{R}(\mu, f(T))$.
Wir wählen nun zwei Zyklen γ_1 und γ_2 mit folgenden Eigenschaften: Der Zyklus γ_2 verlaufe komplett in $V \setminus \sigma(f(T))$, umlaufe jeden Punkt aus $\sigma(f(T))$ und jeden Punkt aus $f(\gamma_1)$ genau ein mal (im positiven Sinne), und umlaufe jeden Punkt aus $\mathbb{C} \setminus V$ Null mal. Der Zyklus γ_1 liege komplett in $f^{-1}(V) \setminus \sigma(T)$, vermeide das Urbild von γ_2 unter f, umlaufe jeden Punkt aus $\sigma(T)$ genau einmal und jeden Punkt aus $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(V)$ sowie jeden Punkt von $f^{-1}(\gamma_2)$ Null mal.
Nun gilt für jedes μ auf dem Zyklus γ_2:

$$\mathrm{R}(\mu, f(T)) = \hat{r}_\mu(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{\mu - f(\lambda)} \mathrm{R}(\lambda, T) \, \mathrm{d}\lambda.$$

Damit können wir berechnen:

$$g(f(T)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} g(\mu) \, \mathrm{R}(\mu, f(T)) \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} g(\mu) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{\mu - f(\lambda)} \mathrm{R}(\lambda, T) \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} g(\mu) \frac{1}{\mu - f(\lambda)} \, \mathrm{d}\mu \, \mathrm{R}(\lambda, T) \, \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} g(f(\lambda)) \, \mathrm{R}(\lambda, T) \, \mathrm{d}\lambda = (g \circ f)(T).$$

36. Sei X ein komplexer Banachraum und sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A. Zeigen Sie: Wenn $(T(t))_{t\geq 0}$ norm-stetig ist, dann gilt $s(A) = \omega(T)$. (4*)

Tipp: Verwenden Sie den Spektralen Abbildungssatz für den holomorphen Funktionalkalkül und die Formel $r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$ für den Spektralradius $r(T)$ eines Operators $T \in \mathcal{L}(X)$.

Lösung: Wir müssen lediglich $\omega(T) \leq s(A)$ zeigen. Sei dazu $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\omega > s(A)$. Wegen der Stetigkeit von A gilt $T(t) = e^{tA}$ (im Sinne des holomorphen Funktionalkalküls für beschränkte Operatoren). Wegen des Spektralen Abbildungssatzes für den holomorphen Funktionalkalkül ist $\sigma(T(1)) = \exp(\sigma(A))$, also gilt

$$\begin{aligned} r(T(1)) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T(1))\} = \sup\{|\exp(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = \sup\{\exp \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} = \\ &= \exp(\sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}) = \exp(s(A)) < \exp(\omega). \end{aligned}$$

Wegen der im Tipp angegebenen Formel für den Spektralradius von $r(T(1))$ gibt es also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $||T^n||^{\frac{1}{n}} \leq \exp(\omega)$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Wir setzen $M_1 := \sup\{||T(t)|| : 0 \leq t \leq n_0\}$, $M_2 := \sup\{e^{-\omega t} : 0 \leq t \leq n_0\}$ und $M := M_1 M_2$.

Sei nun $t \geq 0$ beliebig. Im Falle $t \leq n_0$ gilt

$$||T(t)|| \leq M_1 = M_1 e^{-\omega t} e^{\omega t} \leq M e^{\omega t}.$$

Im Falle $t > n_0$ gilt $n := \lfloor t \rfloor \geq n_0$ und mit $s := t - n \in [0, 1]$ folgt

$$||T(t)|| \leq ||T(s)|| \, ||T(1)^n|| \leq M_1 \exp(\omega n) = M_1 \exp(-\omega s) \exp(\omega s) \exp(\omega n) \leq M \exp(\omega t).$$

Dies zeigt $\omega(T) \leq \omega$.

37. Sei H ein Hilbertraum und A ein selbst-adjungierter Operator auf H mit der Eigenschaft $\sigma(A) \subset (-\infty, 0]$.

(a) Zeigen Sie, dass A sektoriell vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist. (2)

Lösung: Offenbar gilt $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} = \Sigma_\pi \subset \rho(A)$. Sei nun $\varphi < \pi$. Dann gilt für jedes $\lambda = re^{i\alpha} \in \overline{\Sigma}_\varphi \setminus \{0\}$:

$$||\lambda \operatorname{R}(\lambda, A)|| = r \, ||\operatorname{R}(re^{i\alpha}, A)|| = r \, ||\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{r} \operatorname{R}(e^{i\frac{\alpha}{2}}, \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{r} A)|| = ||\operatorname{R}(e^{i\frac{\alpha}{2}}, \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{r} A)||.$$

Weil $\frac{1}{r}A$ selbstadjungiert ist, erzeugt $\frac{1}{r}A$ nach Aufgabe 31 eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel $\frac{\alpha}{2}$. Also erzeugt $e^{-i\frac{\alpha}{2}}A$ eine kontraktive Halbgruppe $(S(t))_{t\geq 0}$ und wegen $\operatorname{Re} e^{i\frac{\alpha}{2}} > 0$ gilt für jedes $x \in X$

$$\begin{aligned} ||\operatorname{R}(e^{i\frac{\alpha}{2}}, \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{r} A)x|| &= ||\int_0^\infty e^{-te^{i\frac{\alpha}{2}}} S(t)x \, \mathrm{d}t|| \leq \int_0^\infty e^{-t\cos(\frac{\alpha}{2})} ||x|| \, \mathrm{d}t \leq \\ &\leq \int_0^\infty e^{-t\cos(\frac{\varphi}{2})} \, \mathrm{d}t \, ||x|| = \frac{||x||}{\cos(\frac{\varphi}{2})}. \end{aligned}$$

Dies zeigt $||\lambda \operatorname{R}(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{\cos(\frac{\varphi}{2})}$ für alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_\varphi \setminus \{0\}$. Wir haben gezeigt, dass A sektoriell vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist.

Bemerkung: Wenn man weiß, dass jeder Operator, der eine beschränkt analytische Halbgruppe vom Winkel θ erzeugt, auch sektoriell vom Winkel θ ist, kann man die Aussage wesentlich einfacher beweisen: Wir wissen nämlich aus Aufgabe 31, dass A für jedes $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ sogar eine sektoriell kontraktive analytische Halbgruppe vom Winkel θ (und somit insbesondere eine beschränkt analytische Halbgruppe vom Winkel θ) erzeugt. Damit ist A sektoriell vom Winkel θ für jedes $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und somit sogar sektoriell vom Winkel $\frac{\pi}{2}$.

(b) Sei nun $H = l^2$ und sei $\alpha = (\alpha_n) \subset (-\infty, 0]$ eine Folge negativer Zahlen. Berechnen Sie für $z \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}} = \mathbb{C}_+$ und $x \in l^2$ das Integral (5)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{z\lambda} \operatorname{R}(\lambda, M_\alpha)x \, \mathrm{d}\lambda$$

(für eine Kurve γ wie in Definition 10.7).

Lösung: Weil M_α selbstadjungiert ist und $\sigma(M_\alpha) \subset (-\infty, 0]$ gilt, ist M_α sektoriell vom Winkel $\frac{\pi}{2}$. Also konvergiert das Integral absolut für jedes $z \in \mathbb{C}_+$, sofern der Integrationsweg γ entsprechend Definition 10.7 gewählt wurde. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{z\lambda}\,\mathrm{R}(\lambda, M_\alpha)x\,\mathrm{d}\lambda\Big)_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{z\lambda}(\mathrm{R}(\lambda, M_\alpha)x)_n\,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{z\lambda}\frac{1}{\lambda-\alpha_n}x_n\,\mathrm{d}\lambda = e^{z\alpha_n}x_n.$$

Die letzte Gleichheit erhält man aus dem Cauchyschen Integralsatz, indem man den Integrationsweg links durch Kreisbögen mit gegen ∞ strebendem Radius abschließt (das Integral über solch einen Kreisbogen strebt für zunehmenden Radius gegen 0, weil es ein $c < 0$ gibt, so dass $\mathrm{Re}(z\lambda) < c$ für alle genügend großen λ gilt).

38. Finden Sie ein Beispiel für einen komplexen Banachraum X und einen Operator A auf X, der sektoriell vom Winkel $\frac{\pi}{4}$ ist, dessen erzeugte Halbgruppe aber nicht sektoriell kontrativ vom Winkel $\frac{\pi}{4}$ ist. (3)

Tipp: Solche Beispiele gibt es bereits auf $X = \mathbb{C}^2$.

Lösung: Für versehen $\mathbb{C}^2$ mit der 1-Norm (dadurch trägt $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ die Spaltensummen-Norm) und betrachten zum Beispiel den Operator

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\frac{3}{4}\pi} & 2 \\ 0 & e^{i\frac{3}{4}\pi} \end{pmatrix}$$

(wobei wir jeden Operator mit seiner Darstellungsmatrix bzgl. der kanonischen Basis identifizieren). Offenbar gilt $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}} = \Sigma_{\frac{3}{4}\pi} \subset \rho(A)$ und für jedes $\lambda \in \rho(A)$ ist

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - e^{i\frac{3}{4}\pi}} & \frac{-2}{(\lambda - e^{i\frac{3}{4}\pi})^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda - e^{i\frac{3}{4}\pi}} \end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir

$$||\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| = \frac{1}{|\lambda|}\Big(\frac{1}{|1-\frac{1}{\lambda}e^{i\frac{3}{4}\pi}|} + \frac{2}{|\lambda|\,|1-\frac{1}{\lambda}e^{i\frac{3}{4}\pi}|^2}\Big) =: \frac{1}{|\lambda|}\Big(\frac{1}{g(\lambda)} + \frac{2}{h(\lambda)}\Big).$$

Für $0 < \varphi < \frac{3}{4}\pi$ gibt es Konstanten $C_\varphi, D_\varphi > 0$ derart, dass $g(\lambda) > C_\varphi$ und $h(\lambda) > D_\varphi$ für $\lambda \in \overline{\Sigma}_\varphi \setminus \{0\}$ ist. Also folgt

$$||\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \leq \frac{1}{|\lambda|}\Big(\frac{1}{C_\varphi} + \frac{2}{D_\varphi}\Big)$$

für alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_\varphi \setminus \{0\}$. Damit ist gezeigt, dass A sektoriell vom Winkel $\frac{\pi}{4}$ ist.

Andererseits gilt für $\lambda = e^{i\frac{\pi}{4}}$, dass

$$||\lambda\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| = \frac{1}{|e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3}{4}\pi}|} + \frac{2}{|e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{3}{4}\pi}|^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1.$$

Würde A eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel $\frac{\pi}{4}$ erzeugen, dann müsste aber $||\lambda\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \leq 1$ auf $\Sigma_{\frac{\pi}{4}}$ und - wegen der Stetigkeit von $\mathrm{R}(\cdot, A)$ - sogar auf $\overline{\Sigma}_{\frac{\pi}{4}} \setminus \{0\}$ gelten.

Also ist die von A erzeugte Halbgruppe nicht sektoriell kontraktiv vom Winkel $\frac{\pi}{4}$.

39. Gilt ein Spektraler Abbildungssatz für das Punktspektrum für den holomorphen Funktionalkalkül? (3*)

Lösung: Ist X ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$, $U \supset \sigma(T)$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt: $f(\sigma_\mathrm{p}(T)) \subset \sigma_\mathrm{p}(f(T))$, genauer: Für jeden Eigenwert λ von T mit Eigenvektor x ist $f(\lambda)$ ein Eigenwert von $f(T)$ mit demselben Eigenvektor x. Zum Beweis sei γ ein Zyklus in $U \setminus \sigma(T)$, der jeden Punkt aus $\sigma(T)$ einmal und jeden Punkt aus $\mathbb{C} \setminus U$ Null mal umläuft. Dann ist

$$f(T)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\mu)\,\mathrm{R}(\mu, T)x\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\mu)\frac{1}{\mu-\lambda}x\,\mathrm{d}\mu f(\lambda)x.$$

Die umgekehrte Inklusion $f(\sigma_\mathrm{p}(T)) \supset \sigma_\mathrm{p}(f(T))$ ist aber im Allgemeinen falsch: Sei nämlich T ein Operator mit leerem Punktspektrum, zum Beispiel der Rechtsshift auf $l^2(\mathbb{N})$, und sei beispielsweise $f = \mathbb{1}$. Dann gilt $f(\sigma_\mathrm{p}(T)) = f(\emptyset) = \emptyset$, aber $\sigma_\mathrm{p}(f(T)) = \sigma_\mathrm{p}(I) = \{1\}$.