Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 04.07.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 20+12*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 10

48. Sei H ein Hilbertraum und sei A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator auf H. Es bezeichne

$$W(A) := \{\langle Ax, x\rangle : x \in D(A),\ ||x|| = 1\}$$

den numerischen Wertebereich von A. Es sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{W(A)}$.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $||(\lambda - A)x|| \geq d||x||$ für alle $x \in D(\lambda - A) = D(A)$, wobei d den Abstand zwischen λ und $\overline{W(A)}$ bezeichnet. (2)

Lösung: Für alle $x \in D(A)$ gilt

$$||(\lambda - A)x|| = |\langle(\lambda - A)x, x\rangle|\,||x|| = |\lambda - \langle Ax, x\rangle|\,||x|| \geq d||x||,$$

weil $\langle Ax, X\rangle \in \overline{W(A)}$ ist.

(b) Folgern Sie, dass $\lambda - A$ injektiv ist und abgeschlossenes Bild besitzt. (3)

Lösung: Wegen $\lambda \notin \overline{W(A)}$ gilt $d > 0$. Für alle $x \neq 0$ ist also $||Ax|| \geq d||x|| > 0$ und somit $Ax \neq 0$. Damit ist die Injektivität von A gezeigt.

Wir müssen noch zeigen, dass $\operatorname{im}(A)$ abgeschlossen ist. Sei also $(y_n) \subset \operatorname{im}(A)$ eine Folge, die gegen ein $y \in H$ konvergiert. Somit ist (y_n) auch eine Cauchy-Folge. Sei (x_n) eine Folge mit $Ax_n = y_n$ für alle n. Wegen der Abschätzung aus (a) ist dann auch (x_n) eine Cauchy-Folge und besitzt somit einen Grenzwert $x \in H$. Weil der Operator A abgeschlossen ist, folgt daraus, dass $x \in D(A)$ und $Ax = y$ gilt. Dies zeigt $y \in \operatorname{im}(A)$.

(c) Sei nun $A \in \mathcal{L}(H)$. Zeigen Sie, dass $\lambda - A$ dichtes Bild besitzt und somit wegen Teilaufgabe (b) surjektiv ist. (4*)

Tipp: Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement von $\operatorname{im}(\lambda - A)$ *nur die* 0 *enthält.*

Lösung: Weil A auf ganz H definiert und beschränkt ist, besitzt A eine überall definierte Adjungierte A^* und $W(A^*)$ enthält offenbar gerade die konjguert komplexen Elemente von $W(A)$. Somit liegt $\overline{\lambda}$ nicht im Abschluss von $W(A^*)$. Nach Teilaufgabe (b) ist also $\overline{\lambda} - A^*$ injektiv.

Sei nun $y \in \operatorname{im}(\lambda - A)^\perp$. Für jedes $x \in H$ gilt dann

$$0 = \langle(\lambda - A)x, y\rangle = \langle x, (\overline{\lambda} - A^*)y\rangle.$$

Dies impliziert $(\overline{\lambda} - A^*)y = 0$ und wegen der Injektivität von $\overline{\lambda} - A^*$ folgt $y = 0$.

Also haben wir $\operatorname{im}(\lambda - A)^\perp = \{0\}$ bewiesen und schließen, dass $\operatorname{im}(\lambda - A)$ dicht in H liegt.

(d) Folgern Sie: Für jedes $A \in \mathcal{L}(H)$ gilt $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$. (2*)

Lösung: Sei $\lambda \in \overline{W(A)}$. Dann ist $\lambda - A$ injektiv und (wegen der Abgeschlossenheit und Dichtheit seines Bildes) auch surjektiv. Dies zeigt $\lambda \in \rho(A)$ und somit $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$.

49. Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum, sei $H = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$, sei $c > 0$ und $m : \Omega \to [c, \infty)$ messbar. Wir definieren ein weiteres Maß ν auf (Ω, Σ) durch $\mathrm{d}\nu = m\,\mathrm{d}\mu$ (d.h. m ist die Radon-Nikodym-Dichte von ν bezüglich μ). Außerdem sei $V = L^2(\Omega, \Sigma, \nu)$.

(a) Zeigen Sie, dass $V \subset H$ ein dichter Untervektorraum ist. (3)

Lösung: Ist $g \in V$, so ist $|\sqrt{m}g| \in H$ und wegen $|g| = \frac{1}{\sqrt{m}}|\sqrt{m}g| \leq \frac{1}{c}|\sqrt{m}g|$ ist somit auch g ein Element von H. Dies zeigt, dass $V \subset H$ gilt. Dies Untervektorraum Eigenschaft ist nun klar.

Wir müssen noch die Dichtheit von V in H zeigen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\Omega_n := \{m \leq n\} := \{\omega \in \Omega : m(\omega) \leq n\}$. Dann gilt $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$.

Ist nun $f \in H$, so konvergieren die Funktionen $f_n := f\,\mathbb{1}_{\Omega_n}$ punktweise gegen f und werden im Betrag durch die $L^2(\mu)$-integrierbare Funktion $|f|$ dominiert. Also gilt $f_n \to f$

in H. Andererseits liegen aber alle Funktionen f_n auch in V, weil nämlich für jedes n die Abschätzung $|\sqrt{m} f_n| \leq \sqrt{n}|f_n| \leq \sqrt{n}|f|$ gilt, woraus die $L^2(\mu)$-Integrierbarkeit von $\sqrt{m} f_n$ und deshalb die $L^2(\nu)$-Integrierbarkeit von f_n folgt.

Also ist f der $L^2(\mu)$-Grenzwert der Folge $(f_n) \subset V$, d.h. V liegt dicht in H.

(b) Berechnen Sie die Operatornorm der kanonischen Einbettung $j : V \to H$ (bzgl. der Hilbertraum-Normen auf V und H). (3*)

Lösung: Sei $\mathrm{im}_{ess}(\sqrt{m}) := \{r \in \mathbb{R} |\ \mu(\{|\sqrt{m} - r| \geq \varepsilon\}) > 0\ \forall \varepsilon > 0\}$ das wesentliches Bild von $\sqrt{m}$ bezüglich μ und sei $\tau := \inf \mathrm{im}_{ess}(\sqrt{m})$ das wesentliche Infimum von $\sqrt{m}$. Wir zeigen, dass $||j|| = \frac{1}{\tau}$ gilt (man beachte, dass $\tau \neq 0$ ist wegen $\tau \geq \sqrt{c} > 0$):

Für jedes $g \in V$ gilt offenbar $||g||_H = ||\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}} g||_H = ||\frac{g}{\sqrt{m}}||_V \leq \frac{1}{\tau}||g||_V$, womit wir $||j|| \leq \frac{1}{\tau}$ gezeigt haben.

Sei andererseits $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine messbare Menge $\tilde{B} \subset \Omega$ mit $\mu(B) > 0$, so dass $0 \leq \sqrt{m} - \tau < \varepsilon$ auf ganz $\tilde{B}$ gilt. Wegen der σ-Endlichkeit von μ finden wir sogar eine messbare Menge $B \subset \Omega$ mit der Eigenschaft $0 < \mu(B) < \infty$, so dass $0 \leq \sqrt{m} - \tau < \varepsilon$ auf ganz B gilt.

Wir definieren nun $g = \frac{1}{\sqrt{m\mu(B)}} \mathbb{1}_B$. Dann gilt $||g||_V = 1$ und

$$||g||_H^2 = \int_B \frac{1}{m\mu(B)}\, \mathrm{d}\mu \geq \int_B \frac{1}{(\tau + \varepsilon)^2\, \mu(B)}\, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{(\tau + \varepsilon)^2}.$$

Damit ist $||j|| \geq \frac{1}{\tau}$ gezeigt.

(c) Berechnen Sie die Operatornorm der kanonischen Einbettung $i : H \to V'$ von H in die Menge aller stetigen anti-linearen Funktionale auf V. (3*)

Lösung: Wir zeigen, dass $||i|| = ||j||$ gilt:

Sei einerseits $f \in H$ und $g \in V$. Dann ist

$$|\langle i(f), g\rangle_V| = |\langle f, g\rangle_H| \leq ||f||_H\, ||g||_H \leq ||j||\, ||f||_H ||g||_V.$$

Also ist $||i(f)||_{V'} \leq ||j||\, ||f||_H$ und somit $||i|| \leq ||j||$.

Sei andererseits $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $g \in V$ mit $||g||_V = 1$ und $||g||_H + \varepsilon \geq ||j||$. Es gilt zugleich $g \in H$ und wir berechnen

$$|\langle i(g), g\rangle_V| = |\langle g, g\rangle_H| = ||g||_H ||g||_H \geq (||j|| - \varepsilon)||g||_H = (||j|| - \varepsilon)||g||_H.$$

Damit ist $||i(g)||_{V'} \geq (||j|| - \varepsilon)||g||_H$ gezeigt und es folgt $||i|| \geq ||j|| - \varepsilon$.

(d) Sei $f \in H$. Dann ist die Abbildung $\varphi : V \to V$, $v \mapsto \overline{i(f)(v)}$ ein stetiges lineares Funktional auf V. Nach dem Satz Riesz-Fréchet gibt es somit ein $u \in V$ mit der Eigenschaft $\varphi(v) = \langle v, u\rangle$ für alle $v \in V$. Bestimmen Sie dieses u in Abhängigkeit von f. (3)

Lösung: Das anti-lineare Funktional $i(f)$ wirkt auf V durch $i(f)(v) = \langle f, v\rangle_H$ für alle $v \in V$. Somit ist $\varphi(v) = \langle v, f\rangle_H$ für alle $v \in V$. Wir suchen somit ein $u \in V$ mit der Eigenschaft

$$\langle v, f\rangle_H = \langle v, u\rangle_V \quad \forall v \in V.$$

Eine solche Funktion u ist offenbar durch $u = \frac{1}{m} f$ gegeben; hierbei beachte man, dass $\frac{1}{m} f \in V$ gilt, weil $\frac{|f|^2}{m^2} m \leq \frac{|f|^2}{c}$ $L^1(\mu)$-integrierbar ist. Aus der Eindeutigkeitsaussage im Satz von Riesz-Fréchet folgt sogar, dass dies die einzig mögliche Wahl für u ist.

Zusatzmbemerkung: Es lohnt sich, noch einmal nachzuprüfen, worum dieses Ergebnis tatsächlich konsistent mit den beiden vorangehenden Teilaufgaben ist. Es gilt nämlich

$$||i(f)||_{V'} = ||\varphi||_{V^*} = ||u||_V = ||\frac{f}{\sqrt{m}}||_H \leq \frac{1}{\tau}||f||_H,$$

also ist $||i|| \leq \frac{1}{\tau}$. Das tatächlich $||i|| = \frac{1}{\tau}$ gilt kann man (ohne Benutzung der Ergebnisse von (b) und (c)) sehen, indem man f ähnlich wählt, wie wir in der Lösung von Teilaufgabe (b) die Funktion g konstruiert hatten.

(e) Betrachten Sie nun den Spezialfall $H = l^2(\mathbb{N})$. Dann ist $m : \mathbb{N} \to [c, \infty)$ also eine Folge. Zudem sei $\beta = (\beta_n) \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge. Sei M_β^V der zu β gehörende Multiplikationoperator auf V. (5)

Zeigen Sie, dass $a : V \times V \to \mathbb{C}$, $(u, v) \mapsto \langle M_\beta^V u, v\rangle$ eine stetige Sesquilinearform ist und charakterisieren Sie, wann diese koerziv ist.

Lösung: Sei $b = ||\beta||_\infty$. Für $u, v \in V$ gilt offenbar $|\langle M_\beta^V u, v\rangle_V| \leq b|\langle u, \langle v| \leq b|u|_V |v|_V < \infty$. Also ist a überall definiert und stetig. Die Sesquilinearität ist offensichtlich.

Wir untersuchen nun die Sequilinearform a auf Koerzitivität. Es gilt

$$\begin{aligned} & a \text{ ist koerziv} \\ \Leftrightarrow \quad & \exists \alpha > 0 : \ \operatorname{Re} a(u,u)_V \geq \alpha ||u||_V^2 \quad \forall u \in V \end{aligned}$$

Dies ist offenbar genau dann der Fall wenn $\inf_n \operatorname{Re} \beta_n > 0$ gilt.

(f) Betrachten Sie den Fall, in dem die Sesquilinearform a aus der vorangehenden Teilaufgabe koerziv ist. Bestimmen Sie in diesem Fall den zu a assoziierten Operator A auf H. (4)

Lösung: Es ist $D(A) = \{x \in V |\ \exists y \in H : \ a(x, v) = \langle y, v\rangle_H \, \forall v \in V\}$ und für jedes $x \in D(A)$ gilt $Ax = y$ mit dem entsprechenden in der Menge eingeführten y (welches, wie in der Vorlesung gezeigt, eindeutig bestimmt ist).

Nun gilt für jedes $x \in V$:

$$\begin{aligned} & \exists y \in H : \quad a(x, v) = \langle y, v\rangle_H \quad \forall v \in V \\ \Leftrightarrow \quad & \exists y \in H : \quad \langle M_\beta^V x, v\rangle_V = \langle y, v\rangle_H \quad \forall v \in V \\ \Leftrightarrow \quad & \exists y \in H : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n v_n m_n = \langle y, v\rangle_H \quad \forall v \in V \\ \Leftrightarrow \quad & \exists y \in H : \quad y = (\beta_n x_n m_n). \end{aligned}$$

Damit ist $x \in D(A)$ genau dann, wenn $(\beta_n x_n m_n) \in H$ gilt. Nach Voraussetzung ist aber die Folge β beschränkt, und aus der Koerzitivität von a folgt nach Teilaufgabe (e), dass $\inf_n \operatorname{Re} \beta_n > 0$ gilt. Insbesondere ist somit $\inf_n |\beta_n| > 0$ und damit ist $(\beta_n x_n m_n) \in H$ äquivalent zu $(x_n m_n) \in H$.

Insgesamt ist also $D(A) = \{x \in V : xm \in H\} = \{x \in H : xm \in H\}$ (man beachte im übrigen, dass $V = \{x \in H : x\sqrt{m} \in H\}$ gilt, d.h. $D(A)$ ist im Allgemeinen eine echte Teilmenge von V). Der Operator A auf $D(A)$ ist (wie an obiger Äquivalenz-Kette erkennt) durch $Ax = \beta m x$ gegeben, d.h. es ist $A = M_{\beta m}$.