Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 10+16*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 11

50. Sei $H = L^2([0,1])$, $H^1 = H^1(0,2)$ und $H^2 = H^2(0,1)$. Zur Erinnerung: Der Sobolev-Räume H^1 und H^2 sind gegeben durch

$$H^1 = \{f \in C([0,1]) : \ f \text{ besitzt eine schwache Ableitung } f' \in H\},$$
$$H^2 = \{f \in H^1 : f' \in H^1\}.$$

Das Skalarprodukt auf H^1 ist gegeben durch

$$\langle u, v\rangle_{H^1} = \int_0^1 u\overline{v} + u'\overline{v}' \,\mathrm{d}x \quad \forall u, v \in H^1.$$

Man kann zeigen, dass H^1 dicht in H liegt und dass die kanonischen Einbettungen

$$(H^1, ||\cdot||_{H^1}) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H) \quad \text{und} \quad (H^1, ||\cdot||_{H^1} \hookrightarrow (C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$$

stetig (sogar kompakt) sind.

Es sei nun $b : \{0,1\} \to [0,\infty)$ beliebig. Wir definieren auf H den **Laplace-Operator mit Robin-Nebenbedingungen** A_b durch

$$D(A_b) = \{u \in H^2 : \ u'(0) = b(0)u(0) \text{ und } u'(1) = -b(1)u(1)\}$$

und $A_b u = -u''$ für alle $u \in D(A_b)$. Unser Ziel ist es, das Evolutionsproblem

$$(*) \begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t,\cdot) = -A_b u(t,\cdot) \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

für $u_0 \in D(A_b)$ auf Wohlgestelltheit zu untersuchen.

(a) Es sei (2)

$$a_b : H^1 \times H^1 \to \mathbb{C}, \quad (u,v) \mapsto \int_0^1 u'\overline{v}' \,\mathrm{d}x + (bu\overline{v})(1) + (bu\overline{v})(0).$$

Zeigen Sie, dass a_b eine stetige Sesqui-Linearform auf H^1 ist.

Lösung: Die Sesqui-Linearität kann man leicht nachrechnen. Die Stetigkeit der Abbildung $(u,v) \int_0^1 u'\overline{v}' \,\mathrm{d}x$ folgt sofort aus der Definition der H^1-Norm und die Stetigkeit der Abbildung $(u,v) \mapsto (bu\overline{v})(1) + (bu\overline{v})(0)$ folgt aus der Stetigkeit der Einbettung $H^1 \hookrightarrow C([0,1])$.

(b) Zeigen Sie, dass a_b H-elliptisch ist. (2)

Lösung: Für jedes $u \in H^1$ gilt

$$\operatorname{Re} a_b(u,u) + ||u||_H^2 = ||u||_V^2 + b(1)|u(1)|^2 + b(0)|u(0)|^2 \geq ||u||_V^2.$$

Also ist a_b H-elliptisch.

(c) Zeigen Sie, dass der zu a_b assoziierte Operator A gerade der Operator A_b ist. (5)
Tipp: Die Formel der partiellen Integration gilt auch für schwache Ableitungen.
Hinweis: Vergessen Sie nicht zu überprüfen, ob die Definitionsbereiche übereinstimmen.

Lösung: Sei A der zu a_b assoziierte Operator. Für $u \in H^1$ und $y \in H$ gilt

$$\begin{aligned} & u \in D(A) \text{ und } Au = y \\ \Leftrightarrow \quad & \forall v \in H^1 : \ a(u,v) = \langle y, v\rangle_H \\ \Leftrightarrow \quad & \forall v \in H^1 : \ \int_0^1 u'\overline{v}' \,\mathrm{d}x + (bu\overline{v})(1) + (bu\overline{v})(0) = \int_0^1 y\overline{v} \,\mathrm{d}x \quad (**). \end{aligned}$$

Wenn $u \in D(A_b)$ und $y = A_b u = -u''$ ist, dann ist $(**)$ erfüllt, wie man sofort mit Hilfe partieller Integration nachprüft.

Wenn umgekehrt $(**)$ erfüllt ist, dann gilt insbesondere für alle $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$, dass $\int_0^1 u'\varphi'\,\mathrm{d}x = \int_0^1 y\varphi\,\mathrm{d}x$ ist. Also ist u' schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung $u'' = -y \in H^1$.

Da wir nun wissen, dass $u \in H^2$ ist, können wir in $(**)$ wiederum partielle Integraton anwenden und erhalten daraus die Bedingung $u'(1)\overline{v}(1) - u'(0)\overline{v}(0) + b(1)u(1)\overline{v}(1) + b(0)u(0)\overline{v(0)}$. Da diese Bedingung für alle $v \in H^1$ erfüllt sein muss, folgt

$$u'(1) = -b(1)u(1) \quad \text{und} \quad u'(0) = b(0)u(0).$$

Also ist $u \in D(A_b)$ und $Au = y = -u'' = A_b u$.

(d) Zeigen Sie, dass das Evolutionsproblem $(*)$ für jeden Startwert $u_0 \in D(A_b)$ eine eindeutige Lösung besitzt. (1)

Lösung: Da A_b zu einer dicht definierten, vollständigen Form a_b assoziert ist, ist A_b nach Theorem 14.3 m-sektoriell und somit erzeugt $-A_b$ nach Theorem 14.1 eine C_0-Halbgruppe. Dies zeigt die Behauptung.

(e) Zeigen Sie, dass A_b selbstadjungiert ist. (1*)

Lösung: Nach Korollar 15.7 müssen wir nur nachrechnen, dass a_b symmetrisch ist. Dies ist aber offensichtlich.

(f) Man kann zeigen, dass A_b kompakte Resolvente besitzt. Bestimmen Sie für den Fall $b(0) = b(1) = 0$ alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A_b und berechnen Sie für die Startfunktion (7*)

$$u_0(x) = 2x^3 - 3x^2$$

die Lösung des Evolutionsproblems $(*)$.

Lösung: Für jede Eigenfunktion v von A_b mit Eigenwert λ gilt $-v'' = \lambda v$; also ist v'' stetig und wir folgern, dass alle Eigenunktionen von A C^2-Funktionen sind.

Außerdem sind alle Eigenwerte λ von A_b reell, weil A_b selbstadjungiert ist. Für $\lambda < 0$ hätte $-v'' = \lambda u$ Lösungen der Form $v(x) = c_1 \exp(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \exp(-\sqrt{-\lambda}x)$. Wegen $v'(0) = 0$ folgt $\sqrt{-\lambda}c_1 - \sqrt{-\lambda}c_2 = 0$, also $c_1 = c_2$. Wegen $v'(1) = 0$ folgt daraus dann $c_1\sqrt{-\lambda}2\sinh(\sqrt{-\lambda}) = 0$ und schließlich $c_2 = 0$. Damit wäre aber $u = 0$. Also besitzt A keine negativen Eigenvektoren.

Sei als nächstes $\lambda = 0$. Dann ist u von der Form $v(x) = c_1 + c_2 x$ und aus den Randbedingungen folgt $c_2 = 0$. Somit ist $v(x) = c_1$ und Normierung liefert $v(x) = 1$. Also besitzt A_b den Eigenwert 0 mit zugehörigem Eigenvektor $v = 1$.

Schließlich sei $\lambda > 0$. Dann sind alle Lösungen der DGl $-v'' = \lambda v$ von der Form

$$v(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Die Nebenbedingung $v'(0) = 0$ liefert $c_1 = 0$ und die zweite Randbedingung $v'(1) = 0$ liefert

$$0 = -c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sqrt{\lambda} \in \pi\mathbb{N}$ liegt, also wenn $\lambda = \pi^2 n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir wählen nach $c_2 = \sqrt{2}$, denn dann gilt $||v||_2 = 1$.

Insgesamt sind die Eigenwerte von A_b also gegeben durch $\lambda_n = \pi^2 n^2$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und die zugehörigen Eigenfunktionen lauten $v_n(x) = \sqrt{2}\cos(\pi n x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $v_0 = 1$.

Die Evolutionsgleichung $(*)$ können wir nun ähnlich lösen wie wir in den Aufgaben 30 und 34 vorgegangen sind:

Man beachte zunächst, dass auch $-A_b$ kompakte Resolvente besitzt. Außerdem besitzt $-A_b$ dieselben Eigenvektoren v_n wie A_b, allerdings zu den Eigenwerten $-\lambda_n$.

Es bildet $\{v_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ eine ONB von H und der Hilbertraum-Isomorphismus $U : H \to l^2$, der jedem $f \in H$ die Folge seiner Fourierkoeffizienten bezüglich der ONB $\{v_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ zuordnet, transformiert $-A_b$ in einen Multiplikationsoperator, dessen Symbol die Folge $(-\lambda_n)$ der Eigenwerte von $-A_b$ ist. Damit erhalten wir für eine beliebige Startfunktion $u_0 \in D(A_b)$ als Lösung des Evolutionsproblem die Funktion

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda_n t)\langle v_n, u_0\rangle v_n(x).$$

Für unser vorgegebenes u_0 berechnen wir die Skalarprodukte $\langle v_n, u_0\rangle$:
Die Stammfunktionen von $x^2\cos x$ und $x^3\cos x$ sind gegeben durch

$$\int x^2 \cos x \, \mathrm{d}x = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x,$$
$$\int x^3 \cos x \, \mathrm{d}x = x^3 \sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x.$$

Damit berechnet man für $n \geq 1$ leicht die Integrale

$$\int_0^1 x^2\sqrt{2}\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{2\sqrt{2}}{(\pi n)^2},$$
$$\int_0^1 x^3\sqrt{2}\cos(\pi n x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{3\sqrt{2}}{(\pi n)^2} + \frac{\sqrt{2}(6-6(-1)^n)}{(\pi n)^4}.$$

Zusammen fassen liefert für $n \geq 1$:

$$\langle v_n, u_0\rangle = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{24\sqrt{2}}{(\pi n)^4} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Außerdem berechnet man für $n = 0$ sofort $\langle v_0, u_0\rangle = -\frac{1}{2}$. Also ist die Lösung unseres Evolutionsproblems gegeben durch

$$u(t,x) = \exp(-\lambda_0 t)(-\frac{1}{2})v_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_{2n-1}t)\frac{24\sqrt{2}}{(\pi(2n-1))^4} v_{2n-1}(x) =$$
$$= -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{48\exp(-\pi^2(2n-1)^2 t)}{(\pi(2n-1))^4}\cos(\pi(2n-1)x).$$

51. Sei $H = l^2$, sei $c > 0$, $(m_n) \subset [c,\infty)$ eine Folge und sei $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty)$ das Maß mit der Eigenschaft $\mathrm{d}\nu = m\,\mathrm{d}\#$ (wobei $\#$ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ bezeichnet).

Wir setzen $V = L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \nu)$. Dann wissen wir aus Aufgabe 49 (a), dass V eine dichte Teilmenge von H ist. Außerdem sei $\beta = (\beta_n) \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge, M_β^V der zu β gehörende Multiplikationsoperator auf V und $a(u,v) = \langle M_\beta^V u, v\rangle_V$ für alle $u, v \in V$.

(a) Aus Aufgabe 49 (e) wissen wir, dass a eine stetige Sesqui-Linearform auf V ist; wir haben dort außerdem charakterisiert, wann a koerziv ist. (3*)

Zeigen Sie nun: Es ist a genau dann H-elliptisch, wenn es ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\inf_n(\operatorname{Re}\beta_n + \frac{\omega}{m_n}) > 0$$

gilt.

Lösung: Es ist a genau dann H-elliptisch, wenn es es $\alpha > 0$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jedes $u \in V$ die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\beta_n |u_n|^2 m_n + \omega\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2 \geq \alpha\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2 + m_n$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{Re}\beta_n + \frac{\omega}{m_n})|u_n|^2 m_n \geq \alpha\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|^2 m_n$$

gilt. Die letzte Abschätzung gilt genau dann für alle $u \in V$, wenn es $\inf_n(\operatorname{Re}\beta_n + \frac{\omega}{m_n}) > 0$ gilt.

(b) Finden Sie ein Beispiel für eine unbeschränkte Folge $(m_n) \subset [c,\infty)$ und eine beschränkte Folge $\beta = (\beta_n) \subset (0,\infty)$, so dass die Sesquilinearform a nicht H-elliptisch ist. (2*)

Lösung: Man wähle beispielsweise $m_n = n$ und $\beta_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt offenbar für jedes $\omega \in \mathbb{R}$, dass

$$\inf_n(\operatorname{Re}\beta_n + \frac{\omega}{m_n}) = \inf_n(\frac{1}{n} + \frac{\omega}{n}) = 0,$$

also ist a laut Teilaufgabe (a) nicht H-elliptisch.

(c) Finden Sie ein Beispiel für eine unbeschränkte Folge $(m_n) \subset [c, \infty)$ und eine Folge $\beta = (\beta_n) \subset (0, \infty)$ mit $\inf \beta_n = 0$, so dass die Sesquilinearform a H-elliptisch ist. (3*)

Lösung: Wir setzen beispielsweise

$$m_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Dann gilt für $\omega = 1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $\operatorname{Re} \beta_n + \frac{\omega}{m_n} \geq 1$ ist und es folgt

$$\inf_n (\operatorname{Re} \beta_n + \frac{\omega}{m_n}) \geq 1 > 0.$$

Also ist a H-elliptisch nach Teilaufgabe (a).