Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 17.07.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 25*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 12

52. Seien V und H Hilberträume, sei $V \hookrightarrow H$ eine dichte Einbettung, und sei a eine stetige, H-elliptische Sesquilineareform auf H. Es sei A der zu a assoziierte Operator.

(a) Sei $D(A)$ mit der Graphnorm $||\cdot||_A$ ausgestattet. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $||u||_V \leq C||u||_A$ für alle $u \in D(A)$ gilt. Folgern Sie, dass die kanonische Einbettung $D(A) \hookrightarrow V$ stetig ist. (3*)

Lösung: Weil a elliptisch ist, gibt es ein $\alpha > 0$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$, sodass $\operatorname{Re} a(v) + \omega||v||_H^2 \geq \alpha||v||_V^2$ für alle $v \in V$ gilt. Für alle $u \in D(A)$ folgt hieraus:

$$||u||_V^2 \leq \frac{1}{\alpha}(\operatorname{Re} a(u) + \omega||u||_H^2) \leq \frac{1}{\alpha}(|a(u)| + \omega||u||_H^2) = \frac{1}{\alpha}(|\langle Au, u\rangle_H| + \omega||u||_H^2) \leq$$
$$\leq \frac{||u||_H}{\alpha}(||Au||_H + \omega||u||_H) \leq \frac{||j||}{\alpha}||u||_V\,(||Au||_H + \omega||u||_H),$$

wobei $j : V \hookrightarrow H$ die kanonische Einbettung bezeichnet. Diese Abschätzung impliziert

$$||u||_V \leq \frac{1}{\alpha}(||Au||_H + \omega||u||_H) \leq \frac{\max\{1,\omega\}}{\alpha}(||Au||_H + ||u||_H) = \frac{\max\{1,\omega\}}{\alpha}||u||_A.$$

Diese Abschätzung zeigt gerade, dass $(D(A), ||\cdot||_H) \hookrightarrow (V, ||\cdot||_V)$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie: Falls die Einbettung $V \hookrightarrow H$ kompakt ist, dann ist auch die kanonische Einbettung $D(A) \hookrightarrow H$ kompakt. Folgern Sie, dass A in diesem Fall kompakte Resolvente besitzt. (1*)
Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 22 (d).

Lösung: Die Einbettung $(D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H)$ setzt sich gerade aus den Abbildungen

$$(D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow (V, ||\cdot||_V) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H)$$

zusammen. Die erste dieser Abbildungen ist nach Teilaufgabe (a) stetig und die zweite ist nach Voraussetzung kompakt. Also ist auch die Hintereinanderausführung beider Abbildungen kompakt.
Nach Aufgabe 22 (d) ist die Kompaktheit der Einbettung $(D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H)$ äquivalent dazu, dass A kompakte Resolvente besitzt.

(c) In Aufgabe 50 (f) war angegeben, dass der Laplace-Operator mit Robin-Randbedingungen A_b kompakte Resolvente besitzt. Verwenden Sie Teilaufgabe (b), um diese Aussage zu beweisen. (1*)
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die kanonische Einbettung $H^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1)$ kompakt ist.

Lösung: In Aufgabe 50 (c) haben wir gezeigt, dass A_b zu einer H-elliptischen Form a_b auf H^1 assoziiert ist. Weil die Einbettung $(H^1, ||\cdot||_{H^1}) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H)$ nach einem Sobolevschen Einbettungssatz kompakt ist, folgt aus Teilaufgabe (b), dass A_b kompakte Resolvente besitzt.

(d) In Aufgabe 30 haben wir auf dem Raum $H = L^2(0, 2\pi)$ den Operator A mit Definitionsbereich (1*)

$$D(A) = \{f \in H^2(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$$

und $Af = f''$ für alle $f \in D(A)$ betrachtet.
Aus Beispiel 16.7 in der Vorlesung wissen Sie, dass $-A$ zu einer Form auf $H_0^1(0, 2\pi)$ assoziiert ist. Zeigen Sie, dass A kompakte Resolvente besitzt.

Lösung: Die Einbettung $(H_0^1, ||\cdot||_{H^1}) \hookrightarrow (H^1, ||\cdot||_{H^1}) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H)$ ist kompakt, weil die erste der beiden Abbildungen stetig und die zweite kompakt ist. Weil $-A$ zu einer elliptischen Form assoziiert ist, folgt aus Teilaufgabe (b), dass $-A$ kompakte Resolvente besitzt. Somit besitzt auch A kompakte Resolvente.

Zusatzinformation zur Lösung: Weil wir mehrmals verwendet haben, dass auf einem beschränkten Intervall die Einbettung $(H^1, ||\cdot||_{H^1}) \hookrightarrow (L^2, ||\cdot||_{L^2})$ kompakt ist, wollen wir das an dieser Stelle noch beweisen:

Satz. *Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall (mit $a < b$). Sei $H = L^2(I)$ und $H^1 = H^1(I)$. Dann ist die kanonische Einbettung $(H^1, ||\cdot||_{H^1}) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H)$ kompakt.*

Beweis. Es gilt $H^1 \subset C(I)$, und die Einbettung $(H^1, ||\cdot||_{H^1}) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H)$ setzt sich zusammen aus den Einbettungen

$$(H^1, ||\cdot||_{H^1}) \hookrightarrow (C(I), ||\cdot||_\infty) \hookrightarrow (H, ||\cdot||_H).$$

Man beachte hierbei, dass die Inklusion $C(I) \subset H$ aus der Beschränktheit von I folgt. Außerdem ist die Einbettung von $C(I)$ in H sogar stetig. Also genügt es zu zeigen, dass die Einbettung von H^1 in $C(I)$ kompakt ist.
Bezeichne B die Einheitskugel in H^1. Wir benutzen den Satz von Arzéla-Ascoli, um zu zeigen, dass B relativ kompakt in $C(I)$ liegt: Dazu müssen wir beweisen, dass B punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist.
Zur Beschränktheit: Weil I beschränkt ist, ist $H = L^2(I)$ eine Teilmenge von $L^18I)$ und die Einbettung $i : H \hookrightarrow L^1(I)$ ist stetig. Für jedes $f \in B$ und jedes $x \in I$ gukt somit

$$|f(x)| = |\int_a^x f'| \leq ||f'||_{L^1} \leq ||i||||f'||_H \leq ||i||||f||_{H^1 \leq ||i||}.$$

Also folgt $||f||_\infty \leq ||i||$ für alle $f \in B$. Insbesondere ist B punktweise beschränkt.
Zur gleichgradigen Stetigkeit: Sei $\varepsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \varepsilon^2$. Für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ und $|y - x| < \delta$ folgt dann

$$|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y |f'| = \int_I |f'|\mathbb{1}_{[x,y]} \leq ||f'||_H \, ||\mathbb{1}_{[x,y]}||_H \leq ||f||_{H_1}\sqrt{\delta} \leq \varepsilon.$$

Somit ist B relativ kompakt in $C(I)$ und es folgt die Behauptung. $\square$

Übrigens kann man mit demselben Beweis auch zeigen, dass die Einbettungen

$$(W^{1,p}(I), ||\cdot||_{W^{1,p}}) \hookrightarrow (C(I), ||\cdot||_\infty) \quad \text{und} \quad (W^{1,p}(I), ||\cdot||_{W^{1,p}}) \hookrightarrow (L^p(I), ||\cdot||_{L^p(I)})$$

kompakt sind, falls $1 < p < \infty$ gilt und das Intervall I kompakt ist.

Vorbemerkung zur nächsten Aufgabe:
Für ein offenes Intervall I und eine Funktion $f \in L^p(I)$ $(1 \leq < \infty)$ hatten wir definiert: Eine Funktion $g \in L^p(I)$ heißt schwache Ableitung von f, falls $\int gv = -\int fv'$ für alle $v \in C_c^\infty(I)$ gilt.
Man kann diese Definition auch leicht verallgemeinern: Unter dem Raum

$$L^1_{loc}(I) := \{f : I \to \mathbb{C} \text{ messbar } : \int_K |f| < \infty \text{ für alle } K \subset I \text{ messbar mit endlichem Maß}\}$$

verstehen wir die Menge aller messbaren Funktionen auf I, die auf jeder messbaren Teilmenge von I, die endliches Lebesgue-Maß besitzt, L^1-integrierbar sind (man nennt Funktionen aus $L^1_{loc}(I)$ auch **lokal L^1-integrierbar**). Man beachte, dass $L^1_{loc}(I) = L^1(I)$ gilt, falls das Intervall I beschränkt ist.
Für eine Funktion $f \in L^p(I)$ und eine Funktion $g \in L^1_{loc}(I)$ definieren wir nun: g heißt **schwache Ableitung** von f, falls $\int fv' = -\int gv$ für alle $v \in C_c^\infty(I)$ gilt.

53. Sei $H = L^2(\mathbb{R})$, $V = \{u \in H^1(\mathbb{R}) : \int |u(x)|^2 x^2 \, \mathrm{d}x < \infty\}$. Wenn wir V mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v\rangle_V = \int u\overline{v} + \int u'\overline{v}' + \int u\overline{v}x^2$$

versehen, wird V zu einem Hilbertraum.

(a) Zeigen Sie, dass V dicht in H liegt. (1*)

Lösung: Offenbar gilt $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset V$ und diese Menge liegt dicht in H.

(b) Zeigen Sie, dass die kanonische Einbettung $V \hookrightarrow H$ kompakt ist. (7**)

Hinweis: Die kanonische Einbettung $H^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ ist ***nicht*** *kompakt, weil das Intervall $\mathbb{R}$ nicht beschränkt ist!*

Lösung: Sei V_1 die Einheitskugel in V. Wir zeigen, dass V_1 in H total beschränkt ist. Sei also $\varepsilon > 0$.

Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $N > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt und bezeichnen das Interval $[-N, N]$ mit I_N. Für jedes $v \in V_1$ gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}\setminus I_N} |v^2| = \int_{\mathbb{R}\setminus I_N} |v|^2 \frac{x^2}{x^2} \leq \frac{1}{N^2} \int_{\mathbb{R}\setminus I_N} |v|^2 x^2 \leq \frac{1}{N^2} ||v||_V^2 < \varepsilon^2 \quad (*).$$

Nun ist die Einbettung $H^1(I_N) \hookrightarrow L^2(I_N)$ kompakt. Wenn wir mit B die Einheitskugel in $H^1(I_N)$ bezeichnen, dann gibt es also Elemente $f_1, ..., f_n \in L^2(I_N)$, so dass die $L^2(I_N)$-Kugeln um $f_1, ..., f_n$ mit Radius ε die Menge B überdecken.

Wir fassen $L^2(I_N)$ in kanonischer Weise als Teilmenge von $L^2(\mathbb{R})$ auf. Ist nun $v \in V_1$ ein beliebiges Element und $v_N := v|_{I_N}$ seine Einschränkung auf das Intervall I_N, so gilt $v_N \in B$. Also gibt es ein $k \in \{1, ..., n\}$ mit $||f_k - v_N||_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon$ und zusammen mit $(*)$ folgt $||f_k - v||_{L^2(\mathbb{R})} < 2\varepsilon$. Also haben wir endlich viele Elemente $f_1, ..., f_n \in L^2(\mathbb{R})$ gefunden, deren 2ε-Umgebungen die Menge V_1 überdecken. Somit ist V_1 in $L^2(\mathbb{R})$ total beschränkt und folglich relativ kompakt.

(c) Sei nun $a(u, v) = \int u'\overline{v}' + \int u\overline{v}x^2$ für alle $u, v \in V$. Zeigen Sie, dass a eine symmetrische, stetige und H-elliptische Sesquilinearform auf V ist. (3*)

Lösung: Sesqui-Linearität und Symmetrie sind klar. Die Stetigkeit von a folgt aus

$$\begin{aligned}|a(u,v)| \leq & \Big(\int |u'|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int |v'|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int |u|^2 x^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int |v|^2 x^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq & \Big(\int |u'|^2 + \int |u|^2 x^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int |v'|^2 + \int |v|^2 x^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq ||u||_V + ||v||_V;\end{aligned}$$

hierbei haben wir für die erste Abschätzung die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf L^2-Räumen und für die zweite Abschätzung die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $\mathbb{C}^2$ verwendet.

Aufgrund der Gleichung $\operatorname{Re} a(u) + ||u||_H^2 = ||u||_V^2$ ist die Form a elliptisch.

(d) Zeigen Sie, dass der zu a assoziierte Operator A den Definitionsbereich (4*)

$$D(A) = \{f \in V : \ f' \text{ besitzt eine schw. Abl. } f'' \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \text{ und } -f'' + fx^2 \in L^2(\mathbb{R})\}$$

besitzt und durch $Af = -f'' + fx^2$ für alle $f \in D(A)$ gegeben ist.

Bemerkung für Physik-Interessierte: Der Operator A beschreibt einen eindimensionalen quantenmechanischen harmonischen Oszillator.

Lösung: Sei $f \in V$ und $g \in H$. Es gilt

$$\begin{aligned} & f \in D(A) \text{ und } Af = g \\ \Leftrightarrow \quad & \forall v \in V: \ a(f, v) = \langle g, v \rangle_H \\ \Leftrightarrow \quad & \forall v \in V: \ \int f'\overline{v}' + \int f\overline{v}x^2 = \int g\overline{v} \quad (*). \end{aligned}$$

Falls nun f aus unserem Kandidaten für $D(A)$ ist und $g = -f'' + fx^2$ gilt, so berechnen wir für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und alle $v \in V$:

$$\int_a^b g\overline{v} = -\int_a^b f''\overline{v} + \int_a^b f\overline{v}x^2 = -f'\overline{v}|_a^b + \int_a^b f'\overline{v}' + \int_a^b f\overline{v}x^2.$$

Wenn wir a gegen $-\infty$ oder b gegen ∞ gehen lassen, konvergieren alle oben stehende Integrale; also müssen die Grenzwerte $\lim_{a\to-\infty} f'(a)\overline{v}(a)$ und $\lim_{b\to\infty} f'(b)\overline{v}(b)$ existieren, und wegen $f'\overline{v} \in L^1(\mathbb{R})$ folgt, dass beide Grenzwerte nur 0 sein können.

Damit folgt aber tatsächlich $\int g\overline{v} = \int f'\overline{v}' + \int f\overline{v}x^2$; dies ist gerade die Gleichung $(*)$.

Wenn umgekehrt die Gleichung (*) gilt, dann folgt, dass f' die schwache Ableitung $f'' = -g + fx^2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ besitzt. Damit ist $-f'' + fx^2 = g \in L^2(\mathbb{R})$, also liegt f in unserem Kandidaten für $D(A)$ und es gilt die behauptete Formel für A.

(e) Zeigen Sie, dass A kompakte Resolvente besitzt und berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen von A. (4*)

Lösung: Nach Teilaufgabe (b) und Aufgabe 52 (b) besitzt A kompakte Resolvente. Wegen der Symmetrie von a ist A selbst-adjungiert, also ist das Spektrum von A reell. Sei nun $\lambda \in \sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ ein beliebiger Eigenwert und $v \in V \setminus \{0\}$ eine zugehörige Eigenfunktion mit $||v||_H = 1$.

Weil die Form a offenbar positiv definit ist, folgt sofort, dass $\lambda > 0$ gelten muss: Es ist nämlich

$$\lambda = \lambda||v||_H = \langle \lambda v, v\rangle_H = \langle Av, v\rangle_H = a(v, v) > 0.$$

Außerdem folgt aus $-v'' + vx^2 = Av = \lambda v$, dass $v'' = vx^2 - \lambda v$ stetig. Somit ist $v'' \in C(\mathbb{R})$ und folglich $v \in C^2(\mathbb{R})$. Wir müssen nun nur noch die klassische Differentialgleichung

$$f'' = (x^2 - \lambda)f$$

lösen. Dazu setzen wir $g = f \exp(\frac{1}{2}x^2)$ und erhalten für g die Differentialgleichung

$$g'' - 2xg' = (1 - \lambda)g.$$

Falls sich g in eine Potenzreihe mit Koeffizienten a_n entwicklen lässt, erhalten wir daraus die Rekursionslgleichung

$$a_{n+2} = \frac{2n + 1 - \lambda}{(n + 2)(n - 1)} a_n \quad (**).$$

Wenn wir nun umgekehrt a_0 und a_1 beliebig wählen und die restlichen Koeffizienten rekursiv durch die Relation $(**)$ definieren, dann sieht man leicht, dass die zugehörige Potenzreihe die Konvergenzradius ∞ besitzt. Außerdem erfüllt sie nach Konstruktion die Differentialgleichung für g. Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für Diffferentialgleichungen sind also alle Lösungen der DGl für g analytische Funktionen mit Konvergenzradius unendlich und ihre Koeffizienten erfüllen die Rekursionsgleichung $(**)$.

Wenn die Potenzreihenentwicklung von g nicht abbricht, so kann man die Koeffizienten a_n mit Hilfe der Rekursionsgleichung $(*)$ abschätzen, um zu erkennen, dass $g(x)$ für $x \to \infty$ oder für $x \to -\infty$ schneller gegen unendlich geht als $\exp(\frac{1}{2}x^2)$. Dies widerspricht aber der $L^2(\mathbb{R})$-Integrierbarkeit von $f = \exp(-\frac{1}{2}x^2)g$. Wenn umgekehrt die Potenzreihenentwicklung von g abbricht, dann ist g ein Polynom und somit sieht man leicht, dass f tatsächlich im Definitionsbereich von A liegt.

Also ist eine Lösung f von $f'' = (x^2 - \lambda)f$ genau dann eine Eigenfunktion von A, wenn die Potenzreihenentwicklung von $g = \exp(\frac{1}{2}x^2)f$ abbricht. Offenbar ist dies dann und nur dann der Fall, wenn λ eine ungerade natürliche Zahl ist. Wenn $\lambda - 1$ durch 4 teilbar ist, müssen wir den Koeffizienten $a_1 = 0$ wählen (weil dann $2n + 1 - \lambda$ für ungerade n niemals Null ist), und wenn $\lambda - 1$ nicht durch 4 teilbar ist, müssen wir $a_0 = 0$ wählen (weil $2n + 1 - \lambda$ für gerade n niemals Null ist).

Das Spektrum von A besteht somit aus allen ungeraden natürlichen Zahlen $\lambda_n = (2n + 1)$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$), und zu jedem solchen λ_n gehört genau eine Eigenfunktion $f_n = \exp(-\frac{1}{2}x^2)g_n$ mit einem Polynom g_n, dass genau dann gerade ist, wenn n gerade ist, und das genau dann ungerade ist, wenn n ungerade ist. Die Koeffizienten von g_n berechnen sich nach der Rekursionsvorschrift $(*)$.

Zusatzinformationen: Das Polynom g_n nennt man das n-te Hermite-Polynom.

Physikalisches betrachtet, ist jeder Eigenwert $\lambda_n = 2n + 1$ (bis auf Skalierung) gerade ein mögliches Energie-Niveau, das ein quantenmechanischer harmonischer Oszillator annehmen kann.