Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 24.04.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 20+8*

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 1

6. Sei $l^2 = l^2(\mathbb{N})$. Für jedes $t \geq 0$ und jedes $x = (x_n) \in l^2$ sei $T(t)x = (e^{-nt}x_n) \in l^2$. Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf l^2 ist. (5)

Tipp für die starke Stetigkeit: Zeigen Sie, dass $||T(t)||$ auf einer Umgebung von $t = 0$ beschränkt ist und zeigen Sie $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ für alle $x \in c_{00} := \{(x_n) \subset \mathbb{C} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$. Dann folgt die Behauptung aus einem Satz in der Vorlesung.

7. Betrachten Sie den Funktionenraum

$$C_0(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ stetig mit } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\}.$$

Zusammen mit der Supremumsnorm wird dieser Raum zu einem Banachraum.

Für jedes $t \geq 0$ und jedes $f \in C_0(\mathbb{R})$ sei $T(t)f = f(t + \cdot) \in C_0(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf $C_0(\mathbb{R})$ ist (die sogenannte Links-Translations-Halbgruppe). (4)

Tipp für die starke Stetigkeit: Zeigen Sie zunächst, dass alle Funktionen $f \in C_0(\mathbb{R})$ gleichmäßig stetig sind.

(b) Zeigen Sie, dass $T(t)$ für $t \to 0$ nicht in Operatornorm gegen I konvergiert. (2)

8. Sei X ein Banachraum und seien $A : D(A) \to X$, $B : D(B) \to X$ lineare Operatoren auf X. Zeigen Sie:

(a) Ist $\rho(A) \neq \emptyset$, so ist A abgeschlossen. (2)

(b) Ist $A \subset B$ und $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$, so gilt $A = B$. (2)

9. Sei $X = L^1(\mathbb{R})$ der Raum aller komplexwertigen, Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ (modulo f.ü.-Gleicheit). Für $f, g \in X$ definieren wir das Faltungsprodukt $f \star g \in X$ durch

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem definieren wir für jedes $f \in X$ den Faltungsoperator $C_f : X \to X$, $g \mapsto f \star g$.

(a) Zeigen Sie: Für $f, g \in X$ ist tatsächlich auch $f \star g \in X$. Außerdem ist $M_f \in \mathcal{L}(X)$ mit Operatornorm $||C_f|| \leq ||f||_1$, wobei $||\cdot||_1$ die 1-Norm auf $X = L^1(\mathbb{R})$ bezeichnet. (2*)

(b) Sei $(\delta_n) \subset X$ eine Folge von nicht negativen Funktionen mit $||\delta_n||_1 = 1$, sodass für jedes $\alpha > 0$ die Bedingung $\int_{|x|\geq\alpha} \delta_n(x)\,\mathrm{d}x \ \to 0$ (für $n \to \infty$) erfüllt ist (eine solche Folge (δ_n) nennt man auch Dirac-Folge). (4*)

Zeigen Sie zunächst für jedes stetige $f \in X$ mit kompaktem Träger und anschließend für jedes $f \in X$, dass $f \star \delta_n \to f$ in X. Folgern Sie daraus: Für jedes $f \in X$ gilt sogar $||C_f|| = ||f||_1$.

(c) Für jedes $t > 0$ sei die Funktion $k_t \in X$ durch $k_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$ gegeben. Wir setzen nun $T(0) = I$ und $T(t) = C_{k_t}$ für $t > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der vorangehenden Teilaufgaben, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X ist und dass $||T(t)|| = 1$ für jedes $t \geq 0$ gilt. (5)

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Faltung assoziativ und kommutativ ist.

10. Sei $X = \mathbb{C}^2$. Den Raum $\mathcal{L}(X)$ identifizieren wir mit dem Raum aller komplexen 2×2-Matrizen. (2*)
Finden Sie eine Abbildung $\mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$, die zwar die beiden Halbgruppengesetze

- $T(s+t) = T(s)T(t)$ für alle $s, t \geq 0$,
- $T(0) = I$

erfüllt, die aber nicht stark stetig ist.