Universität Ulm
Abgabe: Mittwoch, 08.05.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 36+14*

# Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 2

**11.** Sei $X$ ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ eine Familie von Operatoren, die die folgenden Eigenschaften erfüllt: (5)

(i) $T(s+t) = T(t)T(s)$ für alle $s, t > 0$.

(ii) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ für alle $x \in X$.

Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe ist.

*Tipp für die starke Stetigkeit: Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit, dass $||T(t)||$ auf einem genügend kleinen Intervall $[0, \delta)$ beschränkt ist (am einfachsten per Widerspruchsbeweis). Verwenden Sie dann einen Satz aus der Vorlesung.*

**12.** Sei $X$ ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein dicht definierter Operator auf $X$. Zeigen Sie: Wenn $A$ abgeschlossen und beschränkt ist, dann muss $D(A) = X$ gelten. (2)

**13.** Sei $X$ ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator auf $X$. Weiter sei $\mu \in \rho(A)$. Zeigen Sie den Spektralen Abbildungssatz für Resolventen: $\sigma(\mathrm{R}(\mu, A)) \setminus \{0\} = \frac{1}{\mu - \sigma(A)}$. (3*)

**14.** Sei $X$ ein Banachraum und sei $A \in \mathcal{L}(X)$. Wir definieren

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ für jedes $A \in \mathcal{L}(A)$ in Operatornorm konvergiert (d.h. $\exp(A)$ ist für jedes $A \in \mathcal{L}(X)$ wohldefiniert und liegt wieder in $\mathcal{L}(X)$). (3)

Zeigen Sie außerdem, dass die Abbildung $\exp : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$, $A \mapsto \exp(A)$ stetig ist.

*Tipp für die Stetigkeit: Zeigen Sie zuerst, dass für alle $A, B \in \mathcal{L}(X)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ die geometrische Summenformel $A^{n+1} - B^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k(A - B)B^{n-k}$ gilt.*

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$, $t \mapsto \exp(tA)$ bezüglich der Operatornorm differenzierbar ist mit Ableitung $A\exp(tA)$. (2)

(c) Seien $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie: Wenn $A$ und $B$ kommutieren, dann gilt $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. (2)

*Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Cauchysche Produktformel, die Sie aus der Analysis kennen, auch für absolut-konvergente Reihen beschränkter Operatoren auf Banachräumen gilt.*

(d) Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf $X$ mit Generator $A$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (6)

(i) Die Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ ist sogar normstetig, d.h. für alle $t_0 \geq 0$ gilt $\lim_{t\to t_0} T(t) = T(t_0)$ in Operatornorm.

(ii) Die Ableitung $\dot{T}(0) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t) - I)$ existiert sogar bzgl. der Operatornorm.

(iii) Es gibt ein $B \in \mathcal{L}(X)$ derart, dass $T(t) = \exp(tB)$ für alle $t \geq 0$.

(iv) Der Generator $A$ ist auf ganz $X$ definiert.

(v) Der Generator $A$ ist stetig.

Zeigen Sie zudem: Falls die Aussagen (i) bis (v) erfüllt sind, gilt $\dot{T}(0) = A = B$.

*Tipp für die Implikation (i) ⇒ (ii): Definieren Sie $V(t) := \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s$ für alle $t > 0$; zeigen Sie, dass $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}V(t) = I$ in Operatornorm gilt, und dass für alle $t > 0$ und für alle genügend kleinen $t_0 > 0$ die Formel $T(t) = V(t_0)^{-1}(V(t + t_0) - V(t))$ gilt.*

(e) Sei $X = \mathbb{C}^2$, seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit (2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\exp(A)$, $\exp(B)$ und $\exp(A + B)$.

**15.** Sei $X$ ein Banachraum und seien $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(i) $A$ und $B$ kommutieren.

(ii) $\exp(tA)$ und $\exp(tB)$ kommutieren für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\exp(tA)$ und $\exp(sB)$ kommutieren für alle $t, s \in \mathbb{R}$.

(iv) $\exp(A)$ und $\exp(B)$ kommutieren.

Wir wollen untersuchen, wie diese Aussagen miteinander zusammenhängen.

(a) Zeigen Sie: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). (5*)

(b) Zeigen Sie, dass die Implikation (iv) $\Rightarrow$ (i) im Allgemeinen falsch ist. Finden Sie dazu zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, so dass $\exp(A)$ und $\exp(B)$ kommutieren, $A$ und $B$ hingegen nicht. (2*)
*Tipp: Ein Jordanblock und eine geschickte gewählte Diagonalmatrix reichen aus!*

**16.** Sei $X = L^p(\mathbb{R})$ für $1 \le p < \infty$. Dieser Raum ist zusammen mit der $p$-Norm ein Banachraum.
Sei zudem $\alpha \in \mathbb{R}$ und für jedes $t \ge 0$ und jedes $f \in X$ setzen wir $T(t)f = f(\cdot + \alpha t)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\ge 0}$ eine stark stetige Halbgruppe ist. (3)

(b) Sei $A$ der Generator der Halbgruppe. Zeigen Sie, dass (2)

$$B := \{f \in X \mid f \text{ ist einmal stetig differenzierbar mit } f' \in X\} \subset D(A)$$

ist, und dass für jedes $f \in B$ gilt: $Af = \alpha f'$.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$ gilt. (2)
*Tipp: Verwenden Sie, dass die Spektralschranke des Generators einer stark stetigen Halbgruppe stets kleiner oder gleich der Wachstumsschranke der Halbgruppe ist.*

**17.** Sei $X = L^p([0, 1])$ für $1 \le p < \infty$. Für jedes $f \in X$ und für alle $t, s \ge 0$ setzen wir

$$(T(t)f)(s) = \begin{cases} f(s + t), & \text{falls } s + t \le 1, \\ 0, & \text{falls } s + t > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $(T(t))_{t\ge 0}$ ist eine stark stetige Halbgruppe. (3)

(b) Für den Generator $A$ der Halbgruppe gilt (2)

$$B_0 := \{f \in X : f \text{ ist einmal stetig differenzierbar mit } f' \in X \text{ und } f(1) = 0\} \subset D(A)$$

und $Af = f'$ für alle $f \in B_0$.

(c) $\sigma(A) = \emptyset$. (2)

**18.** Für jede stark stetige Halbgruppe $(T(t))_{t\ge 0}$ auf einem Banachraum $X$ definieren wir die Wachstumsschranke (4*)

$$\omega(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists M \ge 1 \; \forall t \ge 0 : \; ||T(t)|| \le M \exp(\omega t)\}. \qquad (*)$$

Finden Sie eine stark stetige Halbgruppe $(T(t))_{t\ge 0}$ auf $X = \mathbb{C}^2$ derart, dass $\omega(T) = 0$ gilt und $\omega(T)$ in $(*)$ lediglich ein Infimum, aber kein Minimum ist!