Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 12.06.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 17+13*

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 7

35. Sei X ein komplexer Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$. Sei $U \supset \sigma(T)$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

(a) Beweisen Sie den Spektralen Abbildungssatz für den holomorphen Funktionalkalkül: $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$. (5)

Tipp für die Inklusion „$\supset$“ : Definieren Sie für festes $\mu \in \sigma(T)$ eine holomorphe Funktion

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{f(\mu)-f(\lambda)}{\mu-\lambda}, & \text{falls } \lambda \neq \mu \\ f'(\lambda), & \text{falls } \lambda = \mu \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass $(\mu - T)g(T) = g(T)(\mu - T) = f(\mu) - f(T)$ gilt.

(b) Sei $\mu \in \rho(A)$ und $r_\mu : \mathbb{C} \setminus \{\mu\} \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \frac{1}{\mu-\lambda}$. Zeigen Sie, dass $r_\mu(T) = \mathrm{R}(\mu, T)$ gilt. (2)

Bemerkung: Dies zeigt übrigens, dass der Spektrale Abbildungssatz für Resolventen ein Spezialfall des Spektralen Abbildungssatzes für den holomorphen Funktionalkalkül ist.

(c) Sei nun $V \supset f(\sigma(R))$ offen und $g : V \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist $f^{-1}(V)$ eine offene Teilmenge von U, die ebenfalls ganz $\sigma(T)$ enthält. Wir bezeichnen die Einschränkung von f auf die Menge $f^{-1}(V)$ wieder mit f. (6*)

Zeigen Sie: $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

Tipp: Zeigen Sie ähnlich wie in Teilaufgabe (b), dass für $\mu \in \rho(f(T))$ und $\hat{r}_\mu : \mathbb{C} \setminus f^{-1}(\{\mu\}) \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto \frac{1}{\mu - f(\lambda)}$ die Gleichheit $\hat{r}_\mu(T) = \mathrm{R}(\mu, f(T))$ gilt. Dadurch können Sie in der Integraldarstellung von $g(f(T))$ die Resolvente $\mathrm{R}(\lambda, f(T))$ durch ein weiteres Kurvenintegral ersetzen.

36. Sei X ein komplexer Banachraum und sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator A. Zeigen Sie: Wenn $(T(t))_{t\geq 0}$ norm-stetig ist, dann gilt $s(A) = \omega(T)$. (4*)

Tipp: Verwenden Sie den Spektralen Abbildungssatz für den holomorphen Funktionalkalkül und die Formel $r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{\frac{1}{n}}$ für den Spektralradius $r(T)$ eines Operators $T \in \mathcal{L}(X)$.

37. Sei H ein Hilbertraum und A ein selbst-adjungierter Operator auf H mit der Eigenschaft $\sigma(A) \subset (-\infty, 0]$.

(a) Zeigen Sie, dass A sektoriell vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist. (2)

(b) Sei nun $H = l^2$ und sei $\alpha = (\alpha_n) \subset (-\infty, 0]$ eine Folge negativer Zahlen. Berechnen Sie für $z \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}} = \mathbb{C}_+$ und $x \in l^2$ das Integral (5)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{z\lambda}\, \mathrm{R}(\lambda, M_\alpha)x \, \mathrm{d}\lambda$$

(für eine Kurve γ wie in Definition 10.7).

38. Finden Sie ein Beispiel für einen komplexen Banachraum X und einen Operator A auf X, der sektoriell vom Winkel $\frac{\pi}{4}$ ist, dessen erzeugte Halbgruppe aber nicht sektoriell kontrativ vom Winkel $\frac{\pi}{4}$ ist. (3)

Tipp: Solche Beispiele gibt es bereits auf $X = \mathbb{C}^2$.

39. Gilt ein Spektraler Abbildungssatz für das Punktspektrum für den holomorphen Funktionalkalkül? (3*)

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ss13/halbgr.html`